ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Е.Е. Кулеш, И.П. Мартынов (г. Гродно, Беларусь)

Исследуем наличие свойства Пенлеве у дифференциального уравнения с частными производными

$$\omega^2\omega_{xxxx} + a\omega\omega_x\omega_{xxx} + b\omega\omega xx^2 + c\omega_x^2\omega_{xx} =$$

$$= A\omega^2\omega_{xxx} + B\omega^2\omega_{xxt} + C\omega^2\omega_{xtt} + D\omega^2\omega_{ttt} + E\omega\omega_x\omega_{xx} +$$

$$+ G\omega\omega_x\omega xt + H\omega\omega_x\omega_{tt} + K\omega\omega_t\omega_{xx} + L\omega\omega_t\omega xt + M\omega\omega_t\omega tt +$$

$$+ N\omega_x^3 + P\omega_t^3 + I\omega_x^2\omega_t + J\omega_x\omega_t^2 + Q\omega^2\omega_{xx} + R\omega^2\omega xt + S\omega^2\omega tt +$$

$$+ T\omega\omega_x^2 + V\omega\omega_t^2 + W\omega\omega_x\omega_t + X\omega^2\omega_x + Y\omega^2\omega_t + Z\omega^3, \qquad (1)$$

где $\omega = \omega(x,t)$, a, b, c — некоторые константы, коэффициенты A, $B, \ldots$, Z — аналитические функции от x, t в некоторой области. Для наличия свойства Пенлеве у уравнения (1) необходимо, чтобы упрощенное для него уравнение

$$\omega^2\omega_{xxxx} + a\omega\omega_x\omega_{xxx} + b\omega\omega xx^2 + c\omega_x^2\omega_{xx} = 0, \qquad (2)$$

обладало этим свойством. Выполнив в уравнении (1) замену $\omega_x = -u\omega$, $u = u(x,t)$, приведем его к виду

$$u_{xxx} = (a+4)uu_{xx} + (b+3)u_x^2 - (6+3a+2b+c)u^2u_x + (1+a+b+c)u^4. \qquad (3)$$

Сравнивая уравнение (3) с уравнениями такого вида со свойством Пенлеве, получим следующие возможные случаи

1) $a = -4,\ b = 3,\ c = 0$; 2) $a = -2,\ b = -1,\ c = 2$;
3) $a = -3,\ b = 2,\ c = 0$; 4) $a = -2,\ b = 1,\ c = 0$;
5) $a = -1,\ b = 0,\ c = 0$; 6) $a = -3,\ b = -1,\ c = 3$.

Далее, используя метод резонансов, изучим уравнение (1) на наличие свойства Пенлеве в каждом из случаев 1) — 6).

Например, в случае 5) уравнение (1) при этом примет вид

$$\omega^2\omega_{xxxx}-\omega\omega_x\omega_{xxx}=A\omega^2\omega_{xxx}+B(\omega^2\omega_{xxt}-\omega\omega_x\omega_{xt})+C(\omega^2\omega_{xtt}-$$
$$-\omega\omega_x\omega_{tt})+E\omega\omega_x\omega_{xx}+Q\omega^2\omega_{xx}+(B_x-BE-AB-W)\omega^2\omega_{xt}+$$
$$+(C_x-AC-CE)\omega^2\omega_{tt}+T\omega\omega_x^2+W\omega\omega_x\omega_t+(W(A+E)-$$
$$-W_x)\omega^2\omega_t+(T(A+E)-T_x)\omega^2\omega_x+Z\omega^3. \tag{4}$$

Уравнение (4) можно представить в виде системы

$$\Omega_x=(A+E)\Omega-Z;\ \omega_{xxx}+E\omega_{xx}-B\omega_{xt}+T\omega_x+W\omega_t+\Omega\omega=0. \tag{5}$$

Система (5) – линейная. Значит уравнение (4) обладает свойством Пенлеве.