К ТЕОРИИ ЧЕТВЕРТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Л. Л. Голубева (г. Минск, Беларусь)

В работе рассматривается четвертое уравнение Пенлеве

$$w'' = \frac{(w')^2}{2\,w} + \frac{3\,w^3}{2} + 4\,z\,w^2 + 2\,(z^2-\alpha)\,w + \frac{\beta}{w}\,, \qquad (P_4)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ − параметры. Для ненулевых решений $w = w(z,\alpha,\beta)$ уравнения (P_4) известны преобразования [1, 2], которые позволяют строить новые решения при новых значениях параметров:

$$T : w \mapsto \tilde{w} := \frac{1}{2\mu w}(w' - \mu w^2 - 2\mu z w - q),\ \Lambda : (\alpha,\beta) \mapsto (\tilde{\alpha},\tilde{\beta}),$$
$$T^{-1} : \tilde{w} \mapsto w := -\frac{1}{2\,\mu\,\tilde{w}}\,(\tilde{w}' + \mu\,\tilde{w}^2 + 2\,\mu\,z\,\tilde{w} - \tilde{q}), \Lambda^{-1} : (\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) \mapsto (\alpha,\beta),$$

с коэффициентами $\tilde{\alpha} := (2\,\mu - 2\,\alpha + 3\,\mu\,q)/4$, $\tilde{\beta} := -(1 + \mu\,\alpha + q/2)^2/2$, $q^2 = -2\,\beta$, $\alpha := -(2\,\mu + 2\,\tilde{\alpha} + 3\,\mu\,\tilde{q})/4$, $\tilde{q}^2 = -2\,\tilde{\beta}$, $q = \tilde{\alpha}\,\mu - 1 - \tilde{q}/2$, $\mu^2 = \nu^2 = 1$.

В [3] на основе использования тривиальной симметрии $S_0 = w(z,0,\beta) \to \lambda^{-1}w(\lambda z,0,\beta)$, $\lambda^4 = 1$ и $T-$преобразований дана общая схема построения автопреобразований Беклунда в виде $(T^{-1})^m \circ S_0 \circ T^m$, где $m \in \mathbb{Z}$, и параметры удовлетворяют условиям: либо $\alpha \in \mathbb{Z}$, либо $\beta = -2(\alpha + (2\,n+1))^2/9$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Пусть $w = w(z,\alpha,\beta)$ − произвольное решение уравнения (P_4) при значениях параметров, удовлетворяющих условиям $\alpha = \mu + 3\,\mu\,\nu\,q/2$, $\beta = -q^2/2$, $\mu^2 = \nu^2 = 1$, $\lambda^4 = 1$. Тогда функция*

$$\begin{gathered}\tilde{w} := T^{-1}S_0Tw = \lambda\,\left(4w(\lambda z)(\mu\nu q + 2\lambda z w(\lambda z) + w^2(\lambda z) - \mu w'(\lambda z))\right)^{-1} \times \\ \times\big((\lambda^2-1)(4z^2w^2(\lambda z) + (\nu q - (w'(\lambda z))^2)^2) + 2(\lambda^2+1)\mu w^2\,(\lambda z)\,(\nu q - \\ - w'(\lambda z) + 8\lambda z w^3(\lambda z) + (\lambda^2+3)w^4(\lambda z))\big)\end{gathered}$$

также является решением уравнения (P_4) при тех же значениях параметров.

Теорема 2. *Решения w, $\tilde{w}$ и $w_0 = S_0 \circ T\, w$ уравнения (P_4) алгебраически зависимы и удовлетворяют соотношению*

$$2\,(\tilde{w}(z) - \lambda\, w(\lambda\, z)) = (\lambda^2 - 1)\,(2\,z + w_0(z)).$$

Литература. **1.** Лукашевич Н.А. //Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 5. С.771–780. **2.** Громак В.И. //Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 5. С.760–768. **3.** Gromak V., Laine I. and Shimomura S. Painlevé differential equations in the complex plane. Wolter De Gruyter, Berlin-New-York, 2002.