О НИЛЬПОТЕНТНОСТИ ОПЕРАТОРОВ ВНУТРЕННЕЙ СУПЕРПОЗИЦИИ

Ю.А. Быкадоров, О.Г. Медведева (г. Минск, Беларусь)

Оператор внутренней суперпозиции S_h для суммируемых функций на отрезке $[a, b]$ задается в виде $(S_h y)(t) = y(h(t))$, если $h(t) \in [a, b]$, и $(S_h y)(t) = 0$, если $h(t) \notin [a, b]$.

Оператор называется нильпотентным, если его некоторая конечная степень есть нулевой оператор.

Изучаемое свойство важно тем, что именно операторы внутренней суперпозиции задают расположение линий разрыва ядра $K(t, s)$ эволюционного дифференциально-интегрального уравнения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_a^t K(t,s)\,\dot{x}(s)\,ds + A(t)x(a) = f(t), \qquad t \in [a, b], \tag{1}$$

определенного в пространстве абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \longrightarrow R$ с производной из пространства суммируемых функций L. Функции $A(t), f(t)$ также принадлежат пространству L.

В случае, когда линия разрыва ядра $K(t, s)$ задается нильпотентным оператором внутренней суперпозиции, функция Грина краевой задачи для уравнения (1) имеет конечное число линий разрыва, которые описываются с помощью степеней рассматриваемого оператора.

При описании эволюционных уравнений обычно считают, что $h(t) \leq t$. Пусть Ω_h — это множество точек t отрезка $[a, b]$, для которых $h(t) \in [a, b]$. На множестве Ω_h естественным образом строится отображение $H : \Omega_h \longrightarrow [a, b]$.

Точку множества Ω_h назовем существенно неподвижной точкой отображения H, если для любого интервала (α, β), содержащего эту точку, мера Лебега множества $((\alpha, \beta) \cap \Omega_h) \cap H((\alpha, \beta) \cap \Omega_h)$ отлична от нуля.

Теорема 1. *Оператор S_h является нильпотентным тогда и только тогда, когда отображение H не имеет существенно неподвижных точек.*

Обычно в качестве нильпотентных операторов рассматриваются операторы внутренней суперпозиции, которые не имеют неподвижных точек в обычном смысле. Например, операторы со свойством $h(t) \leq t - h$, где $h = const$.

Пример нильпотентного оператора внутренней суперпозиции с функцией $h(t) = a + b - t$, если $t \geq (a + b)/2$, и $h(t) = const < a$, если $t < (a + b)/2$, показывает, что оператор может иметь неподвижную точку, которая не является существенно неподвижной, и быть в этом случае нильпотентным.

В докладе приводятся и другие примеры нильпотентных операторов внутренней суперпозиции с неподвижными точками.