ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Мутлу О.В. (Россия, Санкт-Петербург)

Движение консервативной механической системы, описывающей механизмы с k степенями свободы в потенциальном силовом поле при наличии стационарных голономных связей, задается уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad i = 1, ..., k, \tag{1}$$

где P — потенциал, $P = P(q_1, ..., q_k)$, кинетическая энергия T является квадратичной формой обобщенных скоростей $q_1, ..., q_k$.

Определение 1. Положение

$$q_1 = 0, ..., q_k = 0,$$
$$\dot{q}_1 = 0, ..., \dot{q}_k = 0$$

называется положением равновесия механической системы, если при таком выборе обобщенных координат и обобщенных скоростей уравнение Лагранжа обращается в тождество.

Определение 2. Положение равновесия механической системы называется устойчивым по Ляпунову, если для каждого $t_0 \geq T$, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать число $\delta > 0$ такое, что при $|q_{10}| < \delta, ..., |q_{k0}| < \delta$, $|\dot{q}_{10}| < \delta, ..., |\dot{q}_{k0}| < \delta$ будет

$$|q_1| < \varepsilon, ..., |q_k| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_1| < \varepsilon, ..., |\dot{q}_k| < \varepsilon,$$

при всех $t \geq t_0$.

Здесь через $q_1, ..., q_k, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_k$ обозначены обобщенные координаты и скорости, задающие движение механической системы, имеющие начальные данные

$$q_i = q_{i0}, \ \dot{q}_i = \dot{q}_{i0} \text{ при } t = t_0,$$

так что имеем

$$q_1 = q_1(t, q_{10}, ..., q_{k0}, \dot{q}_{10}, ..., \dot{q}_{k0}, t_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_k = q_k(t, q_{10}, ..., q_{k0}, \dot{q}_{10}, ..., \dot{q}_{k0}, t_0),$$

$$\dot{q}_1 = \frac{d}{dt}q_1, ..., \dot{q}_k = \frac{d}{dt}q_k.$$

Теорема. *Консервативная механическая система, движущаяся в потенциальном поле, имеет устойчивое положение равновесия при воздействии на нее произвольного соленоидального поля обобщенных сил, если потенциальная энергия P имеет минимум в положении равновесия.*