# К ПРОБЛЕМЕ КОППЕЛЯ

*Черкас Л.А.* (Беларусь, Минск)

Рассматривается вещественная квадратичная система

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{1}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - полиномы второй степени относительно $x, y$. Коппель в 1990 г. выдвинул гипотезу, состоящую в том, что если система (1) имеет особую точку $B$, дивергенция векторного поля $f = (P,Q)$ в которой равна нулю, то она имеет не более одного предельного цикла, окружающего любую другую особую точку $A$. Гипотеза Коппеля подтверждена Ф.Зегелингом и Р.Коем с помощью признака Чжан Чжи Фэн во всех случаях, кроме случая, когда система (1) имеет два конечных антиседла и одно седло в бесконечности.

Показывается, что в этом случае задача сводится к исследованию при $x > 0$ предельных циклов системы Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x) \equiv \tilde{P},\ \frac{dy}{dt} = -g(x) \equiv \tilde{Q}, \tag{2}$$

$$F(x) = a_{11}(x^{a-1} - 1)/(a-1) + a_{01}(x^a - 1)/a - (2a+1)(x^{a+1} - 1)/(a+1),$$
$$g(x) = (a_{20} + a_{10}x + (a_{01} - a_{10} - a_{20} - a)x^2 - a_{01}x^3 + ax^4)x^{2a-3},$$
$$0 < a < 1;\ a_{01} = dx_0/(x_0 - 1) + (2a+1)(x_0+1)/x_0,\ x_0 < 0,\ d > 0;$$
$$a_{11} = 2a + 1 - a_{01} + d;\ a_{10} = -d/(x_0 - 1) - a_{20}(x_0 + 1) - (a+1)(x_0+1)/x_0^2;$$
$$a_{20} = a_{20}^0 - h,\ h > 0,\ a_{20}^0 = \min\{(dx_0^2 + (a+1)(x_0^2 - 1))^2/(4ax_0^3(x_0-1)^2),$$
$$(dx_0 + (2a+1)(x_0 - 1))^2/(4(a-1)x_0^2(x_0-1)^2)\}.$$

Точка $A$ при этом переходит в точку $\tilde{A}(1,0)$

Находится широкий класс систем (2), имеющих точно один предельный цикл вокруг точки $\tilde{A}$, и, тем самым, подтверждается гипотеза Коппеля для некоторого неисследованного класса квадратичных систем. Доказательство основывается на использовании функции Дюлака вида

$$H = |\psi(x,y,C)|^{1/k},\ \psi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x,y,C)y^{n-i}, \quad n = 3,4, \quad k > 0,$$

$$\operatorname{div}(H\tilde{f}) = \frac{1}{k}|\psi|^{1/k-1}\phi(x,C)\operatorname{sign}\psi, \quad \tilde{f} = (\tilde{P},\tilde{Q}), \quad \phi = \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x), \tag{3}$$

$\varphi_i(x)$ находятся в явном виде, $C_i$ - константы, и результатов работы [1] .

Например, доказано, что система (2) имеет точно один предельный цикл вокруг точки $\tilde{A}$ при $a = 30/53$; $x_0 = -1$; $d = 0.2$; $a_{20} = a_{20}^0 - h$, $h > 0$. Для этого взята функция $\psi$ вида (3) при $n = 3$, $k = -2/3$.

**Литература. 1.** Гринь А.А., Черкас Л.А. // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С. 29 – 38.