О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Долов М.В., Мулько А.Н. (Россия, Нижний Новгород)

Системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y)\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + a(x,y)H(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -F(x,y)\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} + b(x,y)H(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

при различных ограничениях на функции a, b, F и H изучались многими исследователями

В настоящей работе получены следуюшие результаты.

Теорема 1. *Пусть: 1) в односвязной области G функции a, b, F и H класса C^1, и при этом $F \neq 0$; 2) существует непрерывно дифференцируемая по H при $|H| < \infty$ функция $g(H)$ такая, что в области G значения $\frac{\partial}{\partial x}(aHg'(H)/F) + \frac{\partial}{\partial y}(bHg'(H)/F) \geq 0 (\leq 0)$, причем обращаются в нуль на множестве меры нуль. Тогда система (1) в G не имеет замкнутых траекторий, отличных от состояний покоя.*

Рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 1 при $g(H) = \ln|H|$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. [1] *Если в односвязной области G выполнено условие 1) теоремы 1, при этом $H \in C^2(G)$, и справедливо неравенство $\frac{\partial}{\partial x}(a/F) + \frac{\partial}{\partial y}(b/F) \geq 0$ (≤ 0), причем равенство нулю выполняется на множестве меры нуль, то в G у системы (1) нет периодических траекторий, кроме, может быть овалов l_j кривой $H = 0$, при этом овалы $l_j = \{(x,y) \mid H = 0\}$ будут предельными циклами системы (1), и их характеристические показатели отличены от нуля.*

Теорема 3. *Пусть: 1) $a(x,y) \equiv 0$, $F(x,y) \equiv F(x)$, $b(x,y) \equiv y$, причем функции $F(x), b(y), H(x,y)$ класса C^2 при $x \in G_1 \subset \mathbf{R}$, $y \in G_2 \subset \mathbf{R}$, $(x,y) \in G \subset \mathbf{R}^2$ соответственно; 2) $b'(y) \geq 0 (\leq 0)$, причем обращается в нуль на множестве меры нуль, и ни одна из прямых $x = \alpha_j$, где*

$F(\alpha_j) = 0, \alpha_j \in G_1$, не пересекает овалы кривой $H = 0$. Тогда характеристический показатель любого овала $l_j = \{(x, y) \mid H = 0\}$ отличен от нуля, и у системы (1) в области G нет других предельных циклов, отличных от l_j.

Пример. Система

$$\dot{x} = (x - \alpha)H_y,\ \dot{y} = -(x - \alpha)H_x + yH,$$

где α - вещественный параметр такой, что прямая $x = \alpha$ не пересекает овалы кривой H=0, $H \in C^2(G)$, не имеет других предельных циклов, отличных от H=0.

Литература 1. Долов М.В., Кузьмин Р.В. // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30, № 7, С. 1125 – 1132.