НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЦЕНТРА ДЛЯ ОДНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Ахраменко В. К. (Беларусь, Минск)

Рассматривается одна из нормальных форм A_3-системы из [1]

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 y + bxy + (2a+1)y^5 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k x y^{k+3} + a_k y^{k+5}), \\ \dot{y} = -(a+1)x^3 - axy^2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k y x^{k+2}, \end{cases} \tag{1}$$

при условии $|b| < 2|2a+1|, a > 0$. Переходя к полярным координатам и взяв $r = r_1 \cos\varphi$, получим дифференциальное уравнение $\frac{dr_1}{d\varphi} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(\varphi) r_1^k$, решение которого ищем при условии $r_1(0) = C$, исходя из интеграла Дюлака

$$\cos^{\gamma}\varphi[r_1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\varphi) r_1^{k+1}] = C,\ g_k(0) = 0,\ \gamma = \frac{2a+1}{a+1}.$$

Это приводит к представлению решения в виде

$$r = C^{1/2+1/2\gamma}[1 - \frac{ab}{(a+1)(2a+1)}c^{1/2} + C + \ldots],$$

где

$$M = \frac{4b(a+1)^3(4a^2-1) + ab^2(4a+1)(2a+3) - (2a+3)(a^2+a)(2a+1)^2}{2(a+1)^2(2a+1)^2(2a+3)}.$$

При исследовании окрестности $r = 0$, $\varphi = \pi/2$ замена $\cos\varphi = \rho\cos\Theta$, $r = \rho\sin\Theta$ приводит к дифференциальному уравнению, решение которого изучаем при условии $\rho(\pi/2) = s$. Имея ввиду, что при условии $r(0) = c$ и $\rho(\pi/2) = s$ определяется одна и та же траектория системы (1), получим s как функции от c. После полного обхода начала координат, получим

$$\tilde{C} = c + Nc^2 + \ldots,$$

где $\tilde{C} = r(2\pi)$,

$$N = \int_0^{\pi/2} \sin^{-\frac{1}{\gamma}} \Theta h_1(\Theta) \exp[\int_0^{\Theta} h(\tau) d\tau] d\Theta +$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{-\frac{1}{\gamma}} \Theta h_1(\Theta) \exp[\int_{\pi}^{\Theta} h(\tau) d\tau] d\Theta,$$

$$h(\tau) = -\frac{ab\cos^2\tau}{(2a+1)(2a+1+b\cos\tau\sin\tau)},$$

$$h_1(\tau) = -\frac{\sin\tau(aa_1\sin\tau + ab_1\cos^2\tau)}{(2a+1+b\cos\tau\sin\tau)^2}.$$

Таким образом, имеет место

Теорема. *Если начало координат системы (1) есть центр, то* $N = 0$. *Если* $N \neq 0$, *то начало координат системы (1) — фокус.*

Литература. **1.** Садовский А.П. // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 790 – 799.