О СИНГУЛЯРНЫХ НЕУБЫВАЮЩИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА — ФАУЛЕРА

Рабцевич В. А. (Беларусь, Минск)

Рассматривается уравнение

$$u^{(n)} = p(t)|u|^{\lambda}\operatorname{sign} u, \quad p(t) \geq 0, \quad \lambda > 1, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

с локально интегрируемой на (a, b) функцией $p(t)$, отличной от нуля на множестве положительной меры в любой левой окрестности b.

Определение. Решение $u : [a, b) \to (0, +\infty)$ уравнения (1) называют неколеблющимся сингулярным второго рода, если

$$0 < u^{(i)}(t) \uparrow +\infty \quad \text{при} \quad t \to b \quad (i = 0, \dots, n-1). \tag{2}$$

В [1, с. 323 – 325] получено достаточное условие разрешимости задачи (1), (2)

$$J(a, b) < +\infty, \quad J(s, t) \equiv \int_s^t p(\tau)(b-\tau)^{n-1} d\tau. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если выполнено условие (3), то для решений задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$\sum_{l=0}^{n-1} u^{(l)}(t)(b-t)^l / l! > \big((n-1)!(\lambda-1)^{-1} J(t, b)\big)^{1/(1-\lambda)}, \ t \in (a, b).$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi : (a, b) \to (0, +\infty)$ – неубывающая функция и $u(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда для любых $\mu \in ((1-\nu)/n_1, (1-\nu)/n)$, $\nu \in [0, 1)$, $M > 1$ и $\sigma > 0$ выполнено равенство $\lim\limits_{t \to b} F_{\nu,\mu,\sigma,M}(\varphi)(t) = 0$ и справедлива оценка $u(t) < \gamma[F_{\nu,\mu,\sigma,M}(\varphi)(t)]^{1/((1-\lambda)\mu)}$, где $F_{\nu,\mu,\sigma,M}(\varphi)(t) = = \varphi^\sigma(t) \int_t^b \dfrac{(p(\tau)(b-\tau)^{n-1})^\mu}{\varphi^\sigma(\tau)\varphi_M^{\mu+\nu-1}(\tau)} \left(\dfrac{\dot\varphi(\tau)}{\varphi(\tau)}\right)^\nu d\tau$, $n_1 = 1 + (n-1)\lambda$ и $\gamma > 0$ зависит только от n, λ, μ, ν.*

Следствие 1. *Если уравнение (1) с функцией $p(t)$, удовлетворяющей неравенству $p(t)(b-t)^n < cJ(a, t)$, $\forall t \in (a, b)$, имеет решение вида (2), то должно выполняться условие (3) и в некоторой левой окрестности b имеет место оценка $u(t) < \gamma J^{1/(\mu(1-\lambda))}(t, b)$, $\gamma = \gamma(n, \lambda, \mu)$.*

Если вместе с (3) соблюдается неравенство $p(t)(b-t)^n < cJ(t, b)$, $\forall t \in (a, b)$, то справедлива точная двухсторонняя оценка $0 < \gamma_1 < < u(t) J^{1/(\lambda-1)}(t, b) < \gamma_2$, где γ_1 и γ_2 зависят от n, и λ.

Литература. **1.** Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1990.