

**О СВЯЗИ МЕЖДУ РАВНОМЕРНОЙ
ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТЬЮ И ЛОКАЛЬНОЙ
УПРАВЛЯЕМОСТЬЮ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА**

Popova C. H. (Россия, Ижевск)

Пусть (Σ, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, f^t – однопараметрическая группа движений на Σ , непрерывная по $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$. Для произвольной точки $\sigma \in \Sigma$ через $\gamma_+(\sigma) := \{f^t\sigma : t \geq 0\}$ обозначим положительную полутраекторию движения $t \rightarrow f^t\sigma$; $\bar{\gamma}_+(\sigma)$ – замыкание (в метрике ρ) положительной полутраектории.

Рассмотрим семейство управляемых систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

зависящих от параметра $\sigma \in \Sigma$ и удовлетворяющих условиям: для каждого $\sigma_0 \in \Sigma$ функция $t \rightarrow \|\varphi(f^t\sigma_0)\|$, где $\varphi = (A, B)$, измерима по Лебегу, ограничена на \mathbb{R} и для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $\rho(\sigma_0, \sigma) < \delta$ следует $\sup_{|t| < T} \int_t^{t+1} \|\varphi(f^s\sigma) - \varphi(f^s\sigma_0)\| ds < \varepsilon$. Каждую из систем вида (1) отождествляем с парой (φ, σ) .

Обозначим через $D_\vartheta(\sigma, \mathcal{U})$ множество управляемости в нуль системы (φ, σ) на $[0, \vartheta]$ с множеством допустимых управлений, состоящим из измеримых функций $u : [0, \vartheta] \rightarrow \mathcal{U}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m; B_\alpha^l := \{z \in \mathbb{R}^l : \|z\| \leq \alpha\}$.

Определение 1. Система (φ, σ_0) при фиксированном $\sigma_0 \in \Sigma$ называется равномерно (относительно t) вполне управляемой, если существуют $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $B_\varepsilon^n \subset D_\vartheta(f^t\sigma_0, B_1^m)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $U : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow M_{n \times m}$ – ограниченная измеримая функция, $\lambda_1(\sigma, U) \leq \lambda_2(\sigma, U) \leq \dots \leq \lambda_n(\sigma, U)$ – полный спектр показателей Ляпунова замкнутой линейным по x управлением $u = U(t, \sigma)x$ системы

$$\dot{x} = (A(f^t\sigma) + B(f^t\sigma)U(t, \sigma))x.$$

Определение 2. Система (φ, σ_0) при фиксированном $\sigma_0 \in \Sigma$ обладает свойством равномерной (относительно σ) управляемости показателей Ляпунова, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для каждой точки $\sigma \in \bar{\gamma}_+(\sigma_0)$ и каждого вектора $\mu = \text{colon}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in B_\delta^n$, удовлетворяющего условиям $\lambda_i(\sigma, 0) + \mu_i \leq \lambda_{i+1}(\sigma, 0) + \mu_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$), найдется управление $U : \mathbb{R}_+ \times \bar{\gamma}_+(\sigma_0) \rightarrow B_\varepsilon^{n \times m}$, обеспечивающее равенства $\lambda_i(\sigma, U) = \lambda_i(\sigma, 0) + \mu_i$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема. Предположим, что $\bar{\gamma}_+(\sigma_0)$ компактно и показатели Ляпунова однородной системы

$$\dot{x} = A(f^t\sigma_0)x$$

устойчивы. Система (φ, σ_0) обладает свойством равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова в том и только том случае, когда (φ, σ_0) равномерно вполне управляема.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 97-01-00413 и 99-01-00454) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант 97-0-1.9).