УСТОЙЧИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ СИСТЕМ СО СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

Крыжевич С. Г. (Россия, Санкт-Петербург)

Изучается задача об асимптотических свойствах решений системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

в зависимости от свойств системы линейного приближения

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2}$$

с непрерывной матрицей коэффициентов и от непрерывной нелинейности $f(t, x)$, определенной при $t \geq 0$, $\|x\| < \sigma$ и удовлетворяющей условию $f(t, 0) = 0$.

Определение 1. Пусть $\lambda > 0$, а $\varepsilon \geq 0$. Назовем систему (2) слабо гиперболичной с константами λ и ε, ($A \in WH(\lambda, \varepsilon)$), если существует такое $C > 0$, что для любой вектор-функции $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей при $t \geq 0$ оценке $\|g(t)\| \leq \exp(-\lambda(1 + \varepsilon)t)$, у линейной неоднородной системы $\dot{x} = A(t) + g(t)$ существует решение $\varphi(t)$ такое, что $\|\varphi(t)\| \leq C \exp(-\lambda t)$ при $t \geq 0$.

Гиперболические системы принадлежат классам $WH(\lambda, 0)$ при малых λ, а системы с коэффициентом неправильности Гробмана, меньшим $\lambda\varepsilon$, принадлежат $WH(\lambda, \varepsilon)$.

Определение 2. Отображение f имеет порядок малости α по x, если:

1) $f(t, 0) = 0$ при любых $t \geq 0$;

2) $f \in C_x^N$ и $\partial^{|l|} f / \partial x^l (t, 0) = 0$ для любых мультииндексов l таких, что $|l| \leq N$;

3) $\exists L > 0 : \|\partial^{|l|} f / \partial x^l (t, x_1) - \partial^{|l|} f / \partial x^l (t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|^{\alpha - N}$ для любых l таких, что $|l| = N$, $t \geq 0$ и малых по норме $x_{1,2}$.

Пусть $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ — спектр системы (2), а числа $\lambda > 0$ и $0 \leq k \leq n$ таковы, что $\lambda_k < -\lambda < \lambda_{k+1}$ ($\lambda_0 = -\infty$, а $\lambda_{n+1} = +\infty$). Рассмотрим $\Phi(t) = (X_1(t), ..., X_n(t))$ — нормальную фундаментальную матрицу (2) такую, что показатели $X_1(t)$, ..., $X_n(t)$ равны $\lambda_1, ..., \lambda_n$ соответственно. Обозначим $J_{t_0} = (X_1(t_0), ..., X_k(t_0))$. Получен результат, обобщающий теоремы Ляпунова, Перрона, Гробмана.

Теорема 1. *Пусть λ, $\sigma > 0$ и $\varepsilon \geq 0$, $A \in WH(\lambda, \varepsilon)$, а отображение f удовлетворяет одному из следующих условий.*

а) Оно имеет порядок малости не менее $1 + \varepsilon$ по x или

б) $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l \exp(-\lambda\varepsilon t)\|x_1 - x_2\|$ для некоторого $l > 0$ и произвольных достаточно малых по норме $x_{1,2}$.

Если $f \in C_x^M$, то при $t_0 \geq 0$ существуют взаимно однозначные отображения $g_{t_0} \in C^M$ окрестностей нуля $V_{t_0} \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ со следующими свойствами.

1. $g_{t_0}(0) = 0$.

2. Если нелинейность f удовлетворяет условию а), то $\partial g_{t_0}/\partial y(0) = J(t_0)$, а если условию б), то отображение $h_{t_0}(y) = g_{t_0}y - J(t_0)y$ удовлетворяет условию Липшица $\|h_{t_0}(y_1) - h_{t_0}(y_2)\| \leq D\|y_1 - y_2\|$, где константа D зависит только от A.

3. Для любого $y_0 \in V_{t_0}$ решение $x(t, t_0, g_{t_0}(y_0))$ задачи Коши для системы (1) с начальными данными $x(t_0) = g_{t_0}(y_0)$ имеет показатель Ляпунова, не больший $-\lambda$.

Определим $W^s = \bigcup\limits_{t \geq 0} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x(t, 0, x_0) = g_t(y_0)$ для некоторого $y_0\}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, а $x_0 \in W^s$, то решение $x(t, 0, x_0)$ имеет характеристический показатель, не больший $-\lambda$, а если $x_0 \notin W^s$, то оно имеет показатель Ляпунова, не меньший $-\lambda$, или не продолжимо на промежуток $[0, +\infty)$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-15-96-021).