О ВИДЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ БОЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Конюх А. В., Кузнецов С. В. (Беларусь, Минск)

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно непрерывной и равномерно ограниченной на полуоси $t \geq 0$ матрицей коэффициентов $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{M}_n$ класс всех таких линейных систем и, отождествляя систему (1) с ее матрицей коэффициентов $A(\cdot)$, будем писать $A \in \mathcal{M}_n$. Верхним и нижним показателями Боля ненулевого решения системы (1) называются, соответственно, величины [1, с. 171 — 172, 2]:

$$\overline{\beta}[x(\cdot, \alpha)] \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{t-\tau \to +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|}, \quad \underline{\beta}[x(\cdot, \alpha)] \overset{\text{def}}{=} \varliminf_{t-\tau \to +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|}. \tag{2}$$

Верхние показатели Боля находятся в таком же отношении к понятию равномерной устойчивости как характеристические Ляпунова к понятию устойчивости по Ляпунову, а нижние — аналог (в указанном смысле) нижних показателей Перрона. Формулами (2) определяются функции

$\overline{\beta}(\alpha) : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $\overline{\beta}(\alpha) = \overline{\beta}[x(\cdot,\alpha)]$ и $\underline{\beta}(\alpha) : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $\underline{\beta}(\alpha) = \underline{\beta}[x(\cdot,\alpha)]$, а вместе с ними – и вектор функция $\beta = (\underline{\beta}, \overline{\beta}) : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^2$, которую назовем вектор-функцией Боля системы (1).

В настоящем докладе будут рассматриваться только диагональные дифференциальные системы (1), для которых известно количество верхних и нижних показателей (точная оценка $\leq 2^n - 1$), а также получено полное описание каждого из классов функций $\underline{\mathfrak{B}}_n \overset{\text{def}}{=} \{\underline{\beta} : A \in \mathcal{M}_n\}$ и $\overline{\mathfrak{B}}_n \overset{\text{def}}{=} \{\overline{\beta} : A \in \mathcal{M}_n\}$ ([3,4]). Цель работы — получить описание вектор-функции Боля диагональной дифференциальной системы [1].

Предложение 1. *Для любой функции $f \in \underline{\mathfrak{B}}_n$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая диагональная система (1), что* $\max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} \sup\limits_{t\geq 0} a_{ii}(t) < \max\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} f(\xi) + \varepsilon$.

Предложение 2. *Для любой функции $g \in \overline{\mathfrak{B}}_n$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая диагональная система (1), что* $\min\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} \inf\limits_{t\geq 0} a_{ii}(t) > \min\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} g(\xi) + \varepsilon$.

Теорема. *Для любых функций $f \in \underline{\mathfrak{B}}_n$ и $g \in \overline{\mathfrak{B}}_n$, для которых выполняется* $\max\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} f(\xi) < \min\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} g(\xi)$, *вектор-функция $(f(x), g(x))$ является вектор-функцией Боля некоторой диагональной системы (1).*

Литература. 1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. **2.** Bohl P. // J. reine und angew. Math. 1913, Bd. 144. S. 284 – 318. **3.** Барабанов Е. А., Конюх А. В. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1665 – 1676. **4.** Конюх А. В. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 8. С. 1465 – 1467. **5.** Барабанов Е. А. // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 2. С. 1 – 10.