

**ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
ЛИНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ТРЕТЬЕМУ
УРАВНЕНИЮ ПЕНЛЕВЕ**

Прокопеня А.Н. (Беларусь, Брест), *Чичурин А.В.* (Беларусь, Минск)

Известно [1], что шесть неприводимых уравнений Пенлеве могут быть представлены в виде нелинейных систем двух уравнений. В частности, третье уравнение Пенлеве

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}, \quad (1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — параметры, можно представить в виде системы

$$\begin{cases} zw' = \sqrt{-\delta}z + hw + zw^2v, \\ zv' = \alpha + \gamma zw - (1+h)v - zwv^2. \end{cases} \quad (2)$$

В работе [2] приведена процедура, которая позволяет привести систему вида (2) к уравнению геодезических линий

$$K(w, v) \frac{d^2 w}{dv^2} = E(w, v) \left(\frac{dw}{dv} \right)^3 + F(w, v) \left(\frac{dw}{dv} \right)^2 + G(w, v) \left(\frac{dw}{dv} \right) + H(w, v). \quad (3)$$

Коэффициенты уравнения (3) для (P_3) имеют вид

$$\begin{aligned} E(w, v) &= (v + hv - \alpha)(v^2 - \gamma)^2 w^2, \\ F(w, v) &= 2hw^3(v^2 - \gamma)((2 + h)v^2 - 2\alpha v + h\gamma) - \\ &\quad - (v + hv - \alpha)w((1 + 2h)v^2 - 4\alpha v + (3 + 2h)\gamma)(vw^2 + \sqrt{-\delta}), \\ G(w, v) &= hw^4((1 + 5h)v - \alpha)(v^2 - \gamma) - w^2((1 + 5h + 7h^2)v^2 + \\ &\quad + \alpha^2 - 2\alpha(1 + 3h)v + (1 - 2h)h\gamma)(vw^2 + \sqrt{-\delta}) + \\ &\quad + 2(1 + h)(v + hv - \alpha)(vw^2 + \sqrt{-\delta})^2, \\ H(w, v) &= hw(-h\gamma w^4 + \sqrt{-\delta}(\alpha w^2 + \sqrt{-\delta}) + (\alpha w^2 + \sqrt{-\delta}(1 - h))vw^2), \\ K(w, v) &= -(v^2 w^2 + h\gamma w^2 - \alpha\sqrt{-\delta} + ((1 + h)\sqrt{-\delta} - \alpha w^2)v)^2. \end{aligned}$$

Рассматриваются следующие две задачи: 1) нахождение соотношений между параметрами уравнения (1), которые гарантировали бы интегрируемость уравнения (3); 2) нахождение соотношений между параметрами уравнения (1), при которых уравнение (3) имеет решение, удовлетворяющее уравнению Риккати. При решении этих задач используется СКА "Mathematica" [3].

Литература. 1. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн.: Университетское, 1990. 157 С. 2. Лукашевич Н.А., Чичурин А.В. // Вестн АН РБ, Сер. Физ. Мат. 1995, № 2, С. 9 – 12. 3. Проколеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Мн.: БГУ, 1999. 265 с.