О РЕШЕНИИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Малышева О.Н. (Беларусь, Минск)

Рассмотрим уравнение

$$z^2(z-1)^2W'^2 = 2(W-z)^2(\alpha W^2 + (\beta+\gamma-\alpha)W - \beta) \qquad (1)$$

В докладе укажем на некоторые аналитические свойства решений уравнения (1), переписанного в виде

$$z^2(z-1)^2W'^2 = 2\alpha(W-z)^2(W-\lambda_1)(W-\lambda_2), \qquad (2)$$

где $\beta+\gamma-\alpha = -\alpha(\lambda_1+\lambda_2)$, $\alpha\lambda_1\lambda_2 = -\beta$.

Положив в (2) $V^2 = (W-\lambda_1)(W-\lambda_2)^{-1}$, $V = -\dfrac{2z(z-1)}{\sqrt{2\alpha}(z-\lambda_2)}\dfrac{U'}{U}$, для определения функции $U(z)$ получим уравнение

$$\begin{gathered} z^2(z-1)^2(z-\lambda_2)^2U'' + z(z-1)(z-\lambda_2)(z^2-2\lambda_2 z+\lambda_2)U' - \\ -\tfrac{\alpha}{2}(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)^3U = 0. \end{gathered} \qquad (3)$$

Предположим, что $U_1(z) \neq 0$ — любое частное решение уравнения (3), и пусть

$$U = \xi U_1. \qquad (4)$$

Продифференцировав равенство (4) с учетом уравнения (3) и исключив величины U_1, U, U'_1, для определения функции $\xi(z)$ получим уравнение Шварца

$$2\xi'\xi'' - 3\xi''^2 + (p^2+2p'-4q)\xi'^2 = 0, \qquad (5)$$

где

$$p(z) = \frac{z^2-2\lambda_2 z+\lambda_2}{z(z-1)(z-\lambda_2)}, \quad q(z) = -\frac{\alpha}{2}\frac{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)^3}{z^2(z-1)^2(z-\lambda_2)^2}. \qquad (6)$$

Положив в (5) $\xi' = \eta$, $\eta' = \omega\eta$, для отыскания функции $\omega(z)$ получим уравнение

$$2W' = W^2 - (p^2 - 2p' - 4q). \qquad (7)$$

Частное решение уравнения (7) будем искать в виде

$$\omega^* = \frac{\omega_0 z^2 + \omega_1 z + \omega_2}{z(z-1)(z-\lambda_2)}. \qquad (8)$$

Подставив (6) и (8) в (7), получим ω_0, ω_1, λ_2, а также условие, которому должны удовлетворять параметры α, β, γ

$$\begin{gathered}
[2z(\varepsilon\sqrt{2\alpha}+1)(1-\alpha)-4(2+2\varepsilon\sqrt{2\alpha}+\alpha^2)]M^2+\\
+[z(\varepsilon\sqrt{2\alpha}-3\varepsilon\sqrt{-2\beta})(\varepsilon\sqrt{2\alpha}+1)^2+\\
+z(\varepsilon\sqrt{2\alpha}+1)(2-\beta-\gamma-\alpha)-4(1-\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)-\\
-2(\sqrt{2\alpha}\sqrt{-2\beta}-\varepsilon\sqrt{2\alpha}-\varepsilon\sqrt{-2\beta}+5+\\
+3\beta+3\gamma-3\alpha)(\varepsilon\sqrt{2\alpha}+1)^2]MN+\\
+[z(\varepsilon\sqrt{2\alpha}+1)(\beta+\gamma-\alpha)-(\beta+\gamma-\alpha)^2]N^2=0,
\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$M=2\sqrt{2\alpha}\sqrt{-2\beta}+\varepsilon\sqrt{-2\beta}(2-\beta-\gamma+\alpha)+2\varepsilon\beta\sqrt{2\alpha}+3\beta+\gamma-\alpha,$$

$$N=-2\varepsilon\alpha\sqrt{-2\beta}-2\sqrt{2\alpha}\sqrt{-2\beta}+\varepsilon\sqrt{2\alpha}(2-\beta-\gamma+\alpha)+3\alpha-\beta-\gamma.$$

Таким образом, получено частное решение ω^* уравнения (7) при выполнении условия (9). Построив общее решение ω уравнения (7), найдем последовательно функции η, ξ, U_1, U, V и решение W уравнения (1).