УДК 517.977

КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Астровский А.И., Гайшун И.В.

Предложен способ исследования наблюдаемости линейных нестационарных обыкновенных дифференциальных систем, основанный на квазидифференцируемости выходных переменных по некоторой нижнетреугольной матрице. Такой подход позволяет ослабить требование гладкости коэффициентов при формулировке признаков наблюдаемости.

1. Введение. Понятие наблюдаемости впервые сформулировано Р.Калманом в докладе [1]; там же приведен и критерий наблюдаемости линейных стационарных систем. В нестационарном случае известные необходимые и достаточные условия наблюдаемости [2, с.40-46] имеют неявный характер, поскольку требуют знания фундаментальной матрицы. Существующие коэффициентные признаки наблюдаемости основаны на высокой степени гладкости либо коэффициентов [3, с.303-306], либо выходных сигналов [4], [5, с.191-192].

В данной работе вместо дифференцируемости выходов используется их квазидифференцируемость по некоторой нижнетреугольной матрице $P(t)$ [6]. Это позволяет установить явные условия наблюдаемости, существенно усиливающие известные. Матрица $P(t)$ легко находится для систем, записанных в верхней форме Хессенберга, а значит и для всех систем, приводящихся к хессенбергову виду с помощью линейных замен переменных. В связи с этим указан критерий приводимости к хессенберговой форме и предложен алгоритм ее построения. Следует отметить, что хессенберговы системы применяются не только в теории наблюдения, но и в других областях математической теории систем [7],[8]. Поэтому полученные нами результаты могут оказаться полезными и в этих областях.

2. Квазидифференцируемость. Основные результаты, полученные в данной работе, используют понятие квазипроизводной [6] и некоторые простые факты, связанные с ним. Пусть $T = [t_0, t_1]$ — отрезок на действительной прямой $\mathbb{R}$, m — заданное целое неотрицательное число. Обозначим через $\mathcal{U}_m(T)$ совокупность всех нижнетреугольных матриц $P(t)$ размера $((m+1)\times(m+1))$ с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$ $(i,k = 0,1,...,m)$, удовлетворяющими условию $p_{kk}(t) \neq 0$ при $t \in T$, $k = 0,1,...,m$. Выберем какую-либо матрицу $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_m(T)$. Квазипроизводные

$$ {}^{0}_{P}w(t),\ {}^{1}_{P}w(t),\ ...,\ {}^{m}_{P}w(t) $$

порядка $0,1,...,m$ относительно матрицы $P(t)$ непрерывной функции $w : T \to \mathbb{R}$ определяются по следующим рекуррентным правилам

$$
\begin{aligned}
{}^{0}_{P}w(t) &= p_{00}(t)w(t), \quad {}^{1}_{P}w(t) = p_{11}(t)\frac{d\Big({}^{0}_{P}w(t)\Big)}{dt} + p_{10}(t)\Big({}^{0}_{P}w(t)\Big), \quad \ldots, \\
{}^{k}_{P}w(t) &= p_{kk}(t)\frac{d\Big({}^{k-1}_{P}w(t)\Big)}{dt} + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)\Big({}^{i}_{P}w(t)\Big) \quad (k = 2, 3, ..., m);
\end{aligned}
\tag{1}
$$

предполагается, что операции дифференцирования в формулах (1) выполнимы и приводят к непрерывным функциям.

Ясно, что всякая m раз непрерывно дифференцируемая функция квазидифференцируема по единичной матрице E_{m+1}. Однако легко указать примеры (см. [6]), когда недифференцируемая в обычном смысле функция m раз квазидифференцируема по некоторой матрице $P \in \mathfrak{U}_m(T)$.

Семейство всех непрерывных функций, обладающих непрерывными квазипроизводными (1) относительно заданной матрицы $P \in \mathfrak{U}_m(T)$, обозначим через $C^m_P(T)$. Очевидно, $C^m_P(T)$ — векторное пространство над полем действительных чисел.

Пусть $\sigma \in T$. Определим линейный функционал $\Delta_\sigma = {}^{0}_{P}\Delta_\sigma$ на $C^m_P(T)$ равенством $\Delta_\sigma(w) = p_{00}(\sigma)w(\sigma)$, а его квазипроизводные ${}^{j}_{P}\Delta_\sigma$ зададим соотношениями

$$
{}^{j}_{P}\Delta_\sigma(w) = (-1)^j({}^{j}_{P}w(\sigma)) \quad (j = 1, 2, ..., m). \tag{2}
$$

Легко заметить, что отображение Δ_σ является аналогом хорошо известной дельта-функции Дирака δ_σ, сосредоточенной в точке σ, в которую оно и превращается, когда матрица $P(t)$ единична (в этом случае формулы (2) представляют собой обобщенные производные функционала δ_σ).

С помощью квазипроизводных (1) естественным образом вводится в рассмотрение квазидифференциальное уравнение

$$
{}^{m}_{P}z(t) = f(t) \tag{3}
$$

относительно неизвестной функции $z(t)$. Если правая часть $f(t)$ уравнения (3) непрерывна, то для него однозначно разрешима задача Коши

$$
{}^{0}_{P}z(t_0) = a_0, \ {}^{1}_{P}z(t_0) = a_1, \ ..., \ {}^{m-1}_{P}z(t_0) = a_{m-1}
$$

(a_i — заданные действительные числа), а структура всех решений близка к структуре решений обыкновенных дифференциальных уравнений порядка m (см.[6]).

Рассмотрим n функций $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^m_P(T)$, считая $m \geq n-1$, и из строк $\big({}^{0}_{P}f_j(t), \ {}^{1}_{P}f_j(t), \ \ldots, \ {}^{n-1}_{P}f_j(t)\big)$ $(j = 1, 2, ..., n)$ составим матрицу Вронского

$$
{}_{P}W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(t).
$$

Лемма 1. *Пусть при некотором $t^* \in T$ выполняется равенство*

$$
\det {}_{P}W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(t^*) \neq 0; \tag{4}
$$

тогда функции $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots,$ $f_n(t)$ линейно независимы на T.

В самом деле, если при каких-то постоянных g_1, $g_2, \ldots,$ g_n, $g_1^2 + g_2^2 + \ldots + g_n^2 \neq 0$, верно тождество $g_1 f_1(t) + g_2 f_2(t) + \ldots + g_n f_n(t) \equiv 0$, то, дифференцируя его по матрице P $(n-1)$ раз, получим соотношение

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)_P W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(t) \equiv 0, \quad t \in T,$$

которое противоречит условию (4).

Лемма 2. *Функции $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots,$ $f_n(t)$ линейно независимы на каждом интервале $(\tau_0, \tau_1) \subset T$ тогда и только тогда, когда*

$$\det {}_P W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(t) \neq 0 \tag{5}$$

для почти всех $t \in T$.

Доказательство. Достаточность следует из леммы 1. Необходимость докажем методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо при $n = k - 1 < m$, т.е. пусть из линейной независимости функций $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots,$ $f_{k-1}(t)$ на любом множестве $(\tau_0, \tau_1) \subset T$ следует, что $\det {}_P W(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1})(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$. Рассмотрим случай $n = k$ и предположим, от противного, что хотя функции $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots,$ $f_k(t)$ и линейно независимы на каждом интервале из T, но существует множество $(\tau_0, \tau_1) \subset T$, на котором $\det {}_P W(f_1, f_2, \ldots, f_k)(t) \equiv 0$. Тогда найдутся непрерывно дифференцируемые функции $g_1(t)$, $g_2(t), \ldots,$ $g_{k-1}(t)$, $g_1^2(t) + g_2^2(t) + \ldots + g_{k-1}^2(t) \neq 0$, удовлетворяющие при $t \in (\tau_0, \tau_1)$ соотношениям

$${}^j_P f_k(t) = g_1(t)\big({}^j_P f_1(t)\big) + g_2(t)\big({}^j_P f_2(t)\big) + \ldots + g_{k-1}(t)\big({}^j_P f_{k-1}(t)\big) \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{6}$$

На основании формул (1) из равенств (6) вытекают тождества

$${}^j_P f_k(t) = p_{jj}(t)\frac{d\Big({}^{j-1}_{P} f_k(t)\Big)}{dt} + \sum_{s=0}^{j-1} p_{js}(t)\Big({}^s_P f_k(t)\Big) = p_{jj}(t)\frac{d\Big({}^{j-1}_{P} f_k(t)\Big)}{dt} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{j-1} p_{js}(t) \sum_{i=1}^{k-1} g_i(t)\Big({}^s_P f_i(t)\Big) = \sum_{i=1}^{k-1} g_i(t)\big({}^j_P f_i(t)\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} g_i(t)\Big(p_{jj}(t)\frac{d\Big({}^{j-1}_{P} f_i(t)\Big)}{dt} + \sum_{s=0}^{j-1} p_{js}(t)\Big({}^s_P f_i(t)\Big)\Big) \; (j = 1, 2, \ldots, k-1),$$

приводящие к условиям

$$\frac{d\big({}^j_P f_k(t)\big)}{dt} = \sum_{i=1}^{k-1} g_i(t)\frac{d\big({}^j_P f_i(t)\big)}{dt} \quad (j = 0, 1, \ldots, k-2).$$

Поскольку

$$\frac{d\big({}^j_P f_k(t)\big)}{dt} = \sum_{i=1}^{k-1}\Big(\frac{dg_i(t)}{dt}\big({}^j_P f_i(t)\big) + g_i(t)\frac{d\big({}^j_P f_i(t)\big)}{dt}\Big) \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1),$$

то

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{dg_i(t)}{dt}\bigl({}^{j}_{P}f_i(t)\bigr) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, k-2),$$

или

$$\Bigl(\frac{dg_1(t)}{dt}, \frac{dg_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{dg_{k-1}(t)}{dt}\Bigr)\,{}_PW(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1})(t) = 0, \quad t \in (\tau_0, \tau_1),$$

откуда, в силу предположения индукции $\det {}_PW(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1})(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$, следует, что

$$\Bigl(\frac{dg_1(t)}{dt}, \frac{dg_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{dg_{k-1}(t)}{dt}\Bigr) = 0, \quad t \in (\tau_0, \tau_1).$$

Значит функции $g_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ постоянны на множестве (τ_0, τ_1). Поэтому функции $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots,$ $f_k(t)$ линейно зависимы на интервале (τ_0, τ_1). Полученное противоречие доказывает лемму.

3. Наблюдаемость линейных систем с квазидифференцируемыми выходами. Пусть на отрезке T задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{7}$$

выходной p-вектор которой определяется соотношением

$$y(t) = C(t)x(t). \tag{8}$$

Здесь $A(t)$ и $C(t)$ — непрерывные на множестве T матрицы размеров $(n \times n)$ и $(p \times n)$ соответственно.

Напомним [5, с.188], что система (7), (8)

— вполне наблюдаема на множестве T, если отображение $x_0 \longrightarrow y(t, x_0)$ инъективно ($y(t, x_0)$ — значение выходной переменной, порожденное начальным условием $x(t_0) = x_0$);

— дифференциально наблюдаема на множестве T, если она вполне наблюдаема на любом отрезке $[\tau_0, \tau_1] \subseteq T$.

Когда выходные функции (8) достаточно гладкие, эффективные условия полной и дифференциальной наблюдаемости формулируются [5, с.192] в терминах матрицы наблюдаемости, построенной по коэффициентам $A(t)$ и $C(t)$. Покажем, что аналогичные условия можно получить и в случае квазидифференцируемости выходных функций (8).

Пусть $P(t)$ — заданная матрица из множества $\mathfrak{U}_m(T)$. Будем говорить, что система (7), (8) имеет P-класс q, $0 \leq q \leq m$, и при этом писать $(A, C) \in \{P, q\}$, если компоненты всякой функции (8) принадлежат множеству $C^q_P(T)$, т.е. имеют непрерывные квазипроизводные до порядка q включительно.

Лемма 3. *Система* (7), (8) *имеет P-класс q тогда и только тогда, когда существуют и непрерывны матрицы $S_k(t)$ (k = 0,1, ..., q), определяемые формулами*

$$\begin{aligned} S_0(t) &= p_{00}(t)C(t) = {}^{0}_{P}C(t), \\ S_k(t) &= p_{kk}(t)S_{k-1}(t)A(t) + {}_PS_{k-1}(t), \\ {}_PS_{k-1}(t) &= p_{kk}(t)\frac{dS_{k-1}(t)}{dt} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{k\,j}(t)S_j(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, q). \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $(A, C) \in \{P, q\}$. Так как

$$\,_P^0 y(t) = p_{00}(t)y(t) = p_{00}(t)C(t)x(t) = S_0(t)x(t)$$

и существует непрерывная квазипроизводая $\,_P^1 y(t)$ относительно матрицы P, то матрица $S_0(t)$ непрерывно дифференцируема, при этом

$$\,_P^1 y(t) = p_{11}(t)\frac{d\Big(S_0(t)x(t)\Big)}{dt} + p_{10}(t)S_0(t)x(t) =$$

$$= \Big(p_{11}(t)S_0(t)A(t) + {}_P S_0(t)\Big)x(t) = S_1(t)x(t).$$

Следовательно, определена и непрерывно дифференцируема матрица $S_1(t)$. Продолжая аналогичные рассуждения далее, без труда убеждаемся, что все матрицы (9) существуют и непрерывны.

Достаточность. Поскольку $S_0(t)x(t) = p_{00}(t)C(t)x(t) = \,_P^0 y(t)$, то функция $\,_P^0 y(t)$ непрерывно дифференцируема. Далее, из непрерывной дифференцируемости вектор-функции $S_1(t)x(t)$ и определения матрицы $S_1(t)$ вытекают равенства

$$S_1(t)x(t) = p_{11}(t)\Big[S_0(t)A(t) + \frac{dS_0(t)}{dt}\Big]x(t) + p_{10}(t)S_0(t)x(t) =$$

$$= p_{11}(t)\frac{d\Big(\,_P^0 y(t)\Big)}{dt} + p_{10}(t)\Big(\,_P^0 y(t)\Big) = \,_P^1 y(t).$$

Поэтому квазипроизводная $\,_P^1 y(t)$ существует и непрерывно дифференцируема. Продолжая такие же выкладки, легко приходим к соотношениям

$$S_k(t)x(t) = \,_P^k y(t) \quad (k = 0, 1, \dots, q),$$

которые показывают, что система (7), (8) имеет P-класс q. Лемма доказана.

Составим из блоков $S_k(t)$ $(k = 0, 1, \dots, q)$ матрицу $S^{(q)}(t)$:

$$S^{(q)}(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ \dots \\ S_q(t) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Из доказательства леммы 3 следует, что для любого решения $x(t)$ системы (7) и соответствующего ему выхода $y(t)$ выполняется равенство $Y(t) = S^{(q)}(t)x(t)$, где $Y(t)$ — столбец, образованный элементами $\,_P^0 y(t)$, $\,_P^1 y(t)$, $\dots, \,_P^q y(t)$. Поэтому система (7), (8) P-класса q

— вполне наблюдаема на множестве T, если для некоторого $\sigma \in T$ верно условие $\operatorname{rank} S^{(q)}(\sigma) = n$;

— дифференциально наблюдаема на множестве T, когда $\operatorname{rank} S^{(q)}(t) = n$ для почти всех $t \in T$.

Помимо полной и дифференциальной наблюдаемости, важное значение имеет равномерная наблюдаемость, которая для систем с достаточно гладкими выходами определяется как возможность однозначного определения состояния $x(\sigma)$ по значениям дельта-функции и ее обобщенных производных на множестве выходных функций [5, с.225-226]. В случае квазидифференцируемости аналог равномерной наблюдаемости можно получить на основании функционалов ${}^{j}_{P}\Delta_{\sigma}$, введенных в рассмотрение в п.2.

Пусть система (7), (8) имеет P-класс q. Скажем, что она наблюдаема в множестве функционалов (разрешающих операций)

$$ {}^{0}_{P}\Delta_{\sigma},\ {}^{1}_{P}\Delta_{\sigma},\ \ldots, {}^{q}_{P}\Delta_{\sigma}, \tag{11}$$

если по элементам ${}^{k}_{P}\Delta_{\sigma}(y)$ $(k = 0, 1, \ldots, q)$ однозначно находится вектор $x(\sigma)$. Когда наблюдаемость имеет место в множестве (11) при произвольном $\sigma \in T$, то систему (7), (8) назовем равномерно наблюдаемой.

Очевидно, критерием равномерной наблюдаемости системы (7), (8) служит равенство $\operatorname{rank} S^{(q)}(t) = n$ при каждом $t \in T$.

Особое значение в теории наблюдения имеет случай $q = n-1$. Дело в том, что при $q = n-1$, $P(t) = E_n$ и когда система (7), (8) стационарна, сформулированные выше условия полной и дифференциальной наблюдаемости являются не только достаточными, но и необходимыми. Кроме того, необходимость условия $\operatorname{rank} S^{(n-1)}(\sigma) = n$ для полной наблюдаемости имеет место и для аналитических матриц $A(t)$ и $C(t)$, а равенство $\operatorname{rank} S^{(n-1)}(t) = n$ почти всюду на T служит критерием дифференциальной наблюдаемости [5, с.192]. Как показывает следующее утверждение, аналогичный критерий дифференциальной наблюдаемости справедлив и в случае квазидифференцируемости функций (8).

Теорема 1. *Если $(A, C) \in \{P, n-1\}$, то система (7), (8) дифференциально наблюдаема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} S(t) = n$ для почти всех $t \in T$, где $S(t) = S^{(n-1)}(t)$ — матрица, определенная соотношениями (9), (10).*

Доказательство теоремы основано на леммах 1, 2 и проводится с помощью незначительной модификации рассуждений из [5, с.175-178].

4. Системы в верхней форме Хессенберга. При использовании результатов предыдущего пункта возникает нетривиальная проблема нахождения хотя бы одного элемента $P(t)$ множества $\mathcal{U}_m(T)$, относительно которого выходные функции системы (7), (8) q раз квазидифференцируемы.

Укажем один класс систем наблюдения со скалярным выходом, для которых эта проблема легко решается, а затем, воспользовавшись инвариантностью множества выходов относительно линейных невырожденных преобразований в пространстве состояний, опишем способ построения матрицы $P(t)$ и для более широкого класса уравнений.

Говорят, что линейная система

$$\dot{x}(t) = H(t)x(t), \quad y(t) = g(t)x(t), \quad t \in T, \tag{12}$$

имеет верхнюю форму Хессенберга, если непрерывные на отрезке T $(n \times n)$-матрица

$H(t)$ и n-вектор строка $g(t)$ задаются следующим образом:

$$H(t) \;=\; \begin{pmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) & \dots & r_{1,\,n-1}(t) & r_{1n}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) & \dots & r_{2,\,n-1}(t) & r_{2n}(t) \\ 0 & r_{32}(t) & r_{33}(t) & \dots & r_{3,\,n-1}(t) & r_{3n}(t) \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n-1,\,n-1}(t) & r_{n-1,\,n}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n,\,n-1}(t) & r_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$g(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & r_{10}(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$r_{k,\,k-1}(t) \neq 0 \quad (t \in T, \quad k = 1, 2, ..., n). \tag{14}$$

Определим $((n+1) \times (n+1))$-матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} r_{10}^{-1}(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r_{nn}(t) r_{n,\,n-1}^{-1}(t) & r_{n,\,n-1}^{-1}(t) & \dots & 0 & 0 \\ -r_{n-1,\,n}(t) r_{n-1,\,n-2}^{-1}(t) & -r_{n-1,\,n-1}(t) r_{n-1,\,n-2}^{-1}(t) & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ -r_{2n}(t) r_{21}^{-1}(t) & -r_{2,\,n-1}(t) r_{21}^{-1}(t) & \dots & r_{21}^{-1}(t) & 0 \\ -r_{1n}(t) & -r_{1,\,n-1}(t) & \dots & -r_{11}(t) & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

которая, очевидно, принадлежит множеству $\mathcal{U}_n(T)$.

Простые рассуждения показывают, что справедлива

Лемма 4. *Если выполняются условия* (14), *то система* (12) *в форме Хессенберга* (13) *имеет Q-класс n и каждая ее выходная функция удовлетворяет однородному квазидифференциальному уравнению ${}^{n}_{Q}y(t) = 0$, $t \in T$.*

Легко проверить, что для системы (12), удовлетворяющей неравенствам (14), матрица $S(t)$ имеет вид:

$$S(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому такая система всегда равномерно (а значит полностью и дифференциально) наблюдаема.

Таким образом, в случае системы (12), обладающей свойством (14), без труда находится матрица $Q \in \mathcal{U}_n(T)$, относительно которой все выходные функции n раз квазидифференцируемы, что позволяет сразу же решить разнообразные задачи теории наблюдаемости.

5. Системы, эквивалентные хессенберговым системам. Пусть $\mathcal{G}$ — группа невырожденных при каждом $t \in T$ $(n \times n)$-матриц $G(t)$ с непрерывно дифференцируемыми элементами. Обозначим через $\Sigma(n)$ совокупность линейных систем наблюдения в пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t), \quad t \in T, \tag{16}$$

с непрерывными на T коэффициентами и одномерным выходом. Каждую такую систему отождествим с соответствующей парой (A, c) и зададим действие группы $\mathcal{G}$ на множестве $\Sigma(n)$ соотношением

$$G * (A, c) = (G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G},\ cG), \quad G \in \mathcal{G}, \tag{17}$$

что соответствует замене переменных $x(t) = G(t)z(t)$. Орбиту действия (17), содержащую пару (A, c), обозначим $\mathcal{O}(A, c)$.

Легко проверить, что если система (A, c) имеет P-класс q, то такой же P-класс имеет и любая система орбиты $\mathcal{O}(A, c)$ (поскольку множество всех выходов пары (A, c) инвариантно относительно действия группы $\mathcal{G}$). Следовательно, когда в $\mathcal{O}(A, c)$ содержится система (12) в верхней форме Хессенберга, в силу утверждений предыдущего пункта каждая выходная функция системы (16) n раз квазидифференцируема относительно матрицы (15) и поэтому к уравнениям (16) можно применить результаты п.3. Кроме того, в этом случае выходная функция $y(t)$, задаваемая соотношениями (16), удовлетворяет однородному квазидифференциальному уравнению ${}^{n}_{Q}y(t) = 0$.

Сказанное выше приводит к необходимости исследования вопроса возможности преобразования системы (16) к верхней форме Хессенберга, т.е. к вопросу о наличии в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ хотя бы одной пары (H, g) вида (13). Как показывает следующий пример, это бывает не всегда.

Пример. Рассмотрим систему третьего порядка с матрицей $A(t)$ и строкой $c(t)$ вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \varphi(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где функция $\varphi(t)$ непрерывна, но не является дифференцируемой на T. Предположим, что существует система в верхней форме Хессенберга $(H, g) \in \mathcal{O}(A, c)$. Тогда из формулы (17) легко получить соотношение $g_{22}(t)/g_{21}(t) = \varphi(t)$, которое не может выполняться ни для какой матрицы $G \in \mathcal{G}$ (поскольку левая часть его непрерывно дифференцируема, а правая таковой не является). Следовательно, в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ нет ни одной пары (H, g) в верхней форме Хессенберга.

Однако, если в множестве $\mathcal{O}(A, c)$ содержится какая-либо система в форме Хессенберга, то, как показывает следующее утверждение, в нем имеется и бесконечное множество таких систем.

Лемма 5. *Если орбите $\mathcal{O}(A, c)$ принадлежит пара (H, g) в форме Хессенберга со свойством (14), то совокупность $\mathcal{O}_H(A, c)$ всех хессенберговых систем, расположенных в $\mathcal{O}(A, c)$, описывается соотношением*

$$\mathcal{O}_H(A, c) = \{G * (H, g)\ :\ G \in \mathcal{G}_\Delta\},$$

где $\mathcal{G}_\Delta$ — подгруппа группы $\mathcal{G}$, состоящая из верхнетреугольных матриц.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что преобразование

$$(H(t), g(t)) \longrightarrow (G^{-1}(t)H(t)G(t) - G^{-1}(t)\dot{G}(t),\ g(t)G(t)), \quad G \in \mathcal{G}_\Delta,$$

сохраняет верхнюю форму Хессенберга. Покажем, что если две системы (H^1, g^1) и (H^2, g^2) принадлежат множеству $\mathcal{O}_H(A, c)$, то они связаны некоторой верхнетреугольной матрицей $G \in \mathcal{G}_\Delta$. Так как пары (H^1, g^1) и (H^2, g^2) из одной орбиты $\mathcal{O}(A, c)$, то существует такое преобразование $G \in \mathcal{G}$, что

$$G^{-1}(t)H^1(t)G(t) - G^{-1}(t)\dot{G}(t) = H^2(t), \quad g^1(t)G(t) = g^2(t).$$

Анализируя эти равенства, легко прийти к выводу, что элементы $g_{ij}(t)$ матрицы $G(t)$ имеют вид:

$$g_{ij}(t) = 0,\ i > j\ (i = 2, 3, ..., n;\ j = 1, 2, ..., n-1);$$

$$g_{nn}(t) = \frac{r^2_{10}(t)}{r^1_{10}(t)},\ g_{jj}(t) = g_{j+1,\, j+1}(t)\frac{r^2_{j+1,\, j}(t)}{r^1_{j+1,\, j}(t)}\ (j = n-1, n-2, ..., 1);$$

$$g_{j-1,\, j+k}(t) = \frac{\dot{g}_{j,\, j+k}(t) + \sum\limits_{l=j}^{j+k} g_{j\, l}(t) r^2_{l,\, j+k}(t) - \sum\limits_{l=j}^{j+k} g_{j+k,\, l}(t) r^1_{j\, l}(t)}{r^1_{j,\, j-1}}, \tag{18}$$

$$(k = 0, 1, ..., n-j; \quad j = n, n-1, n-2, ..., 3, 2);$$

здесь $r^1_{ij}(t)$ и $r^2_{ij}(t)$ — элементы пар (H^1, g^1) и (H^2, g^2) соответственно. Таким образом, матрица $G(t)$ верхнетреугольная. Лемма доказана.

Критерий существования системы в верхней форме Хессенберга в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ доставляет следующая

Теорема 2. *Множество $\mathcal{O}(A, c)$ содержит пару в верхней форме Хессенберга (H, g), удовлетворяющую условию* (14), *тогда и только тогда, когда каждая выходная функция $y(t)$ системы (A, c) n раз квазидифференцируема относительно некоторой матрицы $P \in \mathcal{U}_n(T)$ и удовлетворяет однородному квазидифференциальному уравнению*

$$\mathop{}^{n}_{P}y(t) = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Необходимость следует из леммы 4. Достаточность. Пусть существует матрица $P = (p_{ki})^n_{k,i=0} \in \mathcal{U}_n(T)$, для которой выполняются требования теоремы. Построим $(n \times n)$-матрицу

$$H(t) = \begin{pmatrix} -p_{n,\, n-1}(t)p^{-1}_{nn}(t) & \dots & -p_{n1}(t)p^{-1}_{nn}(t) & -p_{n0}(t)p^{-1}_{nn}(t) \\ p^{-1}_{n-1,\, n-1}(t) & \dots & -p_{n-1,\, 1}(t)p^{-1}_{n-1,\, n-1}(t) & -p_{n-1,\, 0}(t)p^{-1}_{n-1,\, n-1}(t) \\ . & \dots & . & . \\ 0 & \dots & -p_{21}(t)p^{-1}_{22}(t) & -p_{20}(t)p^{-1}_{22}(t) \\ 0 & \dots & p^{-1}_{11}(t) & -p_{10}(t)p^{-1}_{11}(t) \end{pmatrix} \tag{20}$$

и обозначим через $z(t)$ n-вектор столбец, компоненты $z_i(t)$ которого равны квазипроизводным $\mathop{}^{n-i}_{P}y(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ выходной функции $y(t)$ относительно матрицы P. В силу формул (1) и соотношения (19) вектор $z(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt} = H(t)z(t)),$$

а выходная функция $y(t)$ пары (A, c) равна $p_{00}^{-1}(t)z_n(t)$, т.е.

$$y(t) = g(t)z(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_{00}^{-1}(t) \end{pmatrix} z(t).$$

Очевидно, построенная система (H, g) имеет форму Хессенберга со свойством (14). Кроме того, множество ее выходов совпадает с множеством выходов системы (A, c). Поэтому пары (H, g) и (A, c) принадлежат одной и той же орбите. Теорема доказана.

Пусть в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ содержится какая-либо пара в форме Хессенберга и пусть $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — две матрицы из множества $\mathcal{U}_n(T)$, относительно которых все выходные функции системы (A, c) n раз квазидифференцируемы. Обозначим через $Y_{P_i}(t)$ вектор-столбец с компонентами

$$\,_{P_i}^{n-1}y(t),\ _{P_i}^{n-2}y(t),\ \dots,\ _{P_i}^{1}y(t),\ _{P_i}^{0}y(t) \quad (i = 1, 2).$$

Как следует из теоремы 2 и леммы 5 столбцы $Y_{P_1}(t)$ и $Y_{P_2}(t)$ связаны следующей простой зависимостью

$$Y_{P_1}(t) = G(t)Y_{P_2}(t), \quad t \in T,$$

где $G(t)$ — элемент группы $\mathcal{G}_\Delta$, определяемый формулами вида (18).

6. Построение верхней формы Хессенберга. Критерий существования верхней формы Хессенберга, описываемой теоремой 2, не является конструктивным, поскольку не дает способа построения матрицы $P(t)$. Поэтому представим более эффективные признаки непустоты множества $\mathcal{O}_H^0(A, c)$, где $\mathcal{O}_H^0(A, c)$ семейство всех верхних форм Хессенберга в орбите $\mathcal{O}(A, c)$, обладающих свойством (14).

Пусть $(H^1, g^1) \in \mathcal{O}_H^0(A, c)$. Значит существует такое $G \in \mathcal{G}$, что верно равенство $G*(A, c) = (H^1, g^1)$. Применив к столбцам $g_i(t)$ матрицы $G(t)$ процесс ортонормирования Грама-Шмидта [9, с.28], получим для $G(t)$ представление в виде произведения непрерывно дифференцируемых ортогональной матрицы $G_o(t)$ и верхнетреугольной матрицы $G_\Delta(t)$: $G(t) = G_o(t)G_\Delta(t)$. Поэтому преобразование $G * (A, c)$ можно записать в виде

$$G_o * (A, c) = (H, g), \tag{21}$$

где пара $(H, g) = G_\Delta^{-1} * (H^1, g^1)$ в силу леммы 5 принадлежит множеству $\mathcal{O}_H(A, c)$. Как показывают простые вычисления, для элементов $r_{ij}(t)$, $r_{ij}^1(t)$, $g_{ij}(t)$ матриц $H(t)$, $H^1(t)$, $G_\Delta(t)$ и векторов $g(t)$, $g^1(t)$ справедливы условия

$$r_{10}(t)g_{nn}(t) = r_{10}^1(t), \quad r_{i+1,\,i}(t)g_{ii}(t) = g_{i+1,\,i+1}(t)r_{i+1,\,i}^1(t) \quad (i = 1, 2, ..., n-1),$$

из которых следует, что $r_{k,\,k-1}(t) \neq 0$ при любых $t \in T$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ и поэтому система (H, g) входит в семейство $\mathcal{O}_H^0(A, c)$.

Представим равенство (21) в виде соотношений

$$G_o'(t)A(t) + \dot{G}_o'(t) = H(t)G_o'(t),\ c(t) = g(t)G_o'(t) \tag{22}$$

(штрих означает транспонирование) и найдем условия, когда они, рассматриваемые как уравнения относительно $G_o(t)$, $H(t)$, $g(t)$, разрешимы. Обозначим через $q_i(t)$ строки матрицы $G_o'(t)$. Из второй формулы (22) следует, что $c(t) = r_{10}(t)q_n(t)$. Поскольку вектора

$q_i(t)$ ортонормированы, то $\|c(t)\| = \sqrt{c(t)c'(t)} = |r_{10}(t)|$, что совместно с предположением (14) приводит к требованию $\|c(t)\| \neq 0$ $(t \in T)$. Считая его выполненным, находим $|r_{10}(t)| = \|c(t)\|$, $q_n(t) = c(t)\|c(t)\|^{-1}$. Так как вектор-функция $q_n(t)$ непрерывно дифференцируема, то должна быть непрерывно дифференцируемой и строка $c(t)\|c(t)\|^{-1}$. Таким образом, из системы (22) можно найти функцию $r_{10}(t)$ и строку $q_n(t)$ тогда и только тогда, когда $\|c(t)\| \neq 0$ и вектор-функция $c(t)\|c(t)\|^{-1}$ непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим n-ую строку первой формулы (22). Легко убедиться, что она имеет вид

$$q_n(t)A(t) + \dot{q}_n(t) = r_{n,n-1}(t)q_{n-1}(t) + r_{nn}(t)q_n(t).$$

Умножая ее справа на столбец $q_n'(t)$, получаем

$$r_{nn}(t) = q_n(t)A(t)q_n'(t) + \dot{q}_n(t)q_n'(t).$$

Кроме того

$$|r_{n,n-1}(t)| = \|q_n(t)A(t) + \dot{q}_n(t) - r_{nn}(t)q_n(t)\|.$$

Поэтому функции $r_{nn}(t)$, $r_{n,n-1}(t)$ и строка $q_{n-1}(t)$ могут быть вычислены, если и только если $\|q_n(t)A(t) + \dot{q}_n(t) - r_{nn}(t)q_n(t)\| \neq 0$ и вектор-функция

$$[q_n(t)A(t) + \dot{q}_n(t) - r_{nn}(t)q_n(t)]r_{n,n-1}^{-1}(t) = q_{n-1}(t)$$

непрерывно дифференцируема.

Анализируя далее $(n-1)$-ую, $(n-2)$-ую и т.д. строки уравнения (22), легко установим необходимые и достаточные условия непустоты множества $\mathcal{O}_H^0(A,c)$. Для формулировки их зададим функции $b_{ij}(t)$, $p_s(t)$, для $i=1$, $j=0$, $s=n$ положив $b_{10}(t) = \|c(t)\|$, $p_n(t) = c(t)\|c(t)\|^{-1}$, а для остальных индексов определив их по следующим рекуррентным правилам: при $k = 0,1,...,n-2$

$$b_{n-k,j}(t) = [p_{n-k}(t)A(t) + \dot{p}_{n-k}(t)]p_j'(t) \ (j = n, n-1, ..., n-k),$$

$$b_{n-k,n-k-1}(t) = \|p_{n-k}(t)A(t) + \dot{p}_{n-k}(t) - \sum_{i=n-k}^{n} b_{n-k,i}(t)p_i(t)\|,$$

$$p_{n-k-1}(t) = [p_{n-k}(t)A(t) + \dot{p}_{n-k}(t) - \sum_{i=n-k}^{n} b_{n-k,i}(t)p_i(t)]b_{n-k,n-k-1}^{-1}(t).$$

Из приведенных рассуждений, вытекает

Теорема 3. *В орбите $\mathcal{O}(A,c)$ содержится система (H,g) в форме Хессенберга со свойством (14) тогда и только тогда, когда $b_{n-k,n-k-1}(t) \neq 0$ при каждом $t \in T$ и n-вектор-функции $p_{n-k}(t)$ $(k = 0,1,...,n-1)$ непрерывно дифференцируемы на множестве T, при этом элементы $r_{ij}(t)$ пары (H,g) определяются соотношениями*

$$r_{10}(t) = b_{10}(t),\ r_{n-k,i}(t) = b_{n-k,i}(t)\ (k = 0,1,...,n-1;\ i = n, n-1, ..., n-k-1),$$

$$r_{1i}(t) = [p_1(t)A(t) + \dot{p}_1(t)]p_i'(t)\ (i = 1,2,...,n),$$

а матрица $G(t)$ *преобразования* $(A, c) \longrightarrow G * (A, c) = (H, g)$ *может быть выбрана ортогональной.*

Литература

1. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Труды I конгресса ИФАК. – М.: Изд-во АН СССР. 1961. Т. 2. С. 521 – 547.

2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир. 1971.

3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука. 1968.

4. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1998. №7. С. 3 - 13.

5. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. М.: Едиториал УРСС. 2004.

6. *Дерр В.Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 1999. Вып. 1(16). С.3 - 105.

7. *Николаев С.Ф., Тонков Е.Л.* Дифференцируемость функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 1996. Вып. 2(8). С. 47 - 68.

8. *Милич Н.В.* О структуре границы управляемости линейной докритической системы на большом промежутке времени // Изв. Института математики и информ. УдГУ. Ижевск. 1998. Вып. 2(13). С. 27 - 52.

9. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир. 1989.