УДК 517.977

КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

Астровский А.И., Гайшун И.В.

Предложен новый способ построения канонических форм Фробениуса для линейных нестационарных систем наблюдения, существенно ослабляющий ограничения на коэффициенты. Достигается это путем привлечения техники квазидифференцирования выходных переменных.

1. Введение. Теория канонических форм Фробениуса для линейных нестационарных систем наблюдения, играющая важную роль в различных прикладных задачах, достаточно полно разработана в предположении гладкости коэффициентов (см. [1, с.243-319]). С другой стороны, в работе [2] показано, что известные условия наблюдаемости можно значительно усилить, если гладкость коэффициентов понимать не в обычном смысле, а в смысле квазидифференцируемости по некоторой нижнетреугольной матрице $P(t)$ [3]. В данной статье техника квазидифференцирования используется для обоснования нового способа построения канонических форм, основанного на изучении специально введенного уравнения относительно параметров канонической системы. При исследовании указанного уравнения уточняются и некоторые рузультаты работы [2], в частности, устанавливается, что признаки наблюдаемости, полученные в ней, не зависят от выбора матрицы $P(t)$, по которой производится квазидифференцирование выходных функций.

2. Постановка задачи. Пусть на отрезке $T = [t_0, t_1]$ задана система наблюдения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t) \tag{1}$$

со скалярным выходом $y(t)$ и непрерывными $(n \times n)$-матрицей $A(t)$ и n-вектор-строкой $c(t)$, определенными над полем вещественных чисел. Отождествим эту систему с парой (A, c), а множество всех таких пар обозначим через Σ_n (индекс n подчеркивает, что фазовым пространством систем из множества Σ_n является векторное пространство $\mathbb{R}^n$).

Пара $(A^0, c^0) \in \Sigma_n$ называется канонической или системой в форме Фробениуса, если

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0(t) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1(t) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad c^0 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\alpha_i(t)$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ — непрерывные на множестве T вещественные функции.

Введем в рассмотрение группу $\mathcal{G}_n$ непрерывно дифференцируемых невырожденных на отрезке T $(n \times n)$-матриц $G(t)$ и зададим ее действие на множестве Σ_n по правилу

$$G * (A, c) = (G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G},\ cG), \quad G \in \mathcal{G}_n, \tag{3}$$

что соответствует замене переменных в системе (1) по формуле $x(t) = G(t)z(t)$. Орбиту действия (3), содержащую пару $(A, c) \in \Sigma_n$, обозначим через $\mathcal{O}(A, c)$.

Говорят, что система (1) обладает канонической формой (2), если $(A^0, c^0) \in \mathcal{O}(A, c)$, т.е., если существует такой элемент $G(t)$ группы $\mathcal{G}_n$, что $G * (A, c) = (A^0, c^0)$.

Каноническая форма всегда единственна, однако не всякая система $(A, c) \in \Sigma_n$ ее имеет [1, с. 285]. Далее мы укажем достаточно конструктивный способ нахождения канонической формы для заданной пары $(A, c) \in \Sigma_n$.

3. Уравнение для коэффициентов канонической формы. По параметрам систем (1), (2) построим дифференциальное уравнение

$$\dot{Q}(t) = A^0(t)Q(t) - Q(t)A(t), \quad t \in T \tag{4}$$

относительно $(n \times n)$-матрицы $Q(t)$. Легко проверить, что совокупность всех его решений определяется формулой

$$Q(t) = F_0(t, t_0)Q_0F^{-1}(t, t_0),$$

где $F_0(t, t_0)$ и $F(t, t_0)$ — фундаментальные матрицы систем (A^0, c^0) и (A, c), нормированные при $t = t_0$, а Q_0 — произвольная постоянная $(n \times n)$-матрица. Значит, если решение $Q(t)$ невырожденно при $t = t_0$, то $\det Q(t) \neq 0$ для всех $t \in T$; когда $\det Q(t_0) = 0$, то $\det Q(t) = 0$ при каждом $t \in T$.

Подчиним матрицу $Q(t)$ условию

$$c^0Q(t) = c(t), \quad t \in T, \tag{5}$$

т.е. предположим, что ее n-ая строка совпадает с $c(t)$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пара* $(A^0, c^0) \in \Sigma_n$ *является канонической формой для системы* (1) *тогда и только тогда, когда уравнение* (4) *обладает невырожденным при* $t = t_0$ *решением* $Q(t)$, *удовлетворяющим условию* (5).

Доказательство. В самом деле, если невырожденная $(n \times n)$-матрица $Q(t)$ имеет свойства (4), (5), то при $G(t) = Q^{-1}(t)$ верно равенство $G * (A, c) = (A^0, c^0)$ и поэтому $(A^0, c^0) \in \mathcal{O}(A, c)$. Обратно, пусть $G*(A, c) = (A^0, c^0)$ для какого-то $G \in \mathcal{G}_n$. Тогда матрица $Q(t) = G^{-1}(t)$ — решение уравнения (4) со свойством (5). Лемма доказана.

Замечание. Так как у любой системы $(A, c) \in \Sigma_n$ не более одной канонической формы, то матрица $Q(t)$, описываемая леммой 1, единственна (если она существует).

Таким образом, задача построения канонической формы для системы (1) эквивалентна наличию матрицы $A^0(t)$ вида (2) и невырожденной матрицы $Q(t)$, удовлетворяющих соотношениям (4), (5). Обозначим через $q_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ строки матрицы $Q(t)$. Несложно убедиться, что условия (4), (5) равносильны соотношениям

$$q_n(t) = c(t), \quad q_{n-i}(t) = \dot{q}_{n-i+1}(t) + q_{n-i+1}(t)A(t) - \alpha_{n-i}(t)c(t) \quad (i = 1, 2, ..., n-1), \tag{6}$$

$$\dot{q}_1(t) + q_1(t)A(t) - \alpha_0(t)c(t) = 0, \quad t \in T. \tag{7}$$

Пусть C_n — множество всех непрерывных на отрезке T n-вектор-строк, σ — перестановка компонент строки $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, действующая по правилу $\sigma(v) = (v_2, v_3, ..., v_n, v_1)$, и p — проекция на первую координатную ось: $pv = v_1$. Определим последовательность операторов $V_k : \Sigma_n \times C_n \to C_n$ $(k = 1, 2, ...)$ следующим образом:

$$V_1(A, c, v)(t) = \dot{c}(t) + c(t)A(t) - c(t)pv(t),$$

$$V_2(A, c, v)(t) = \frac{d(V_1(A, c, v)(t))}{dt} + V_1(A, c, v)(t)A(t) - c(t)p\sigma(v(t)),$$

$$V_3(A, c, v)(t) = \frac{d(V_2(A, c, v)(t))}{dt} + V_2(A, c, v)(t)A(t) - c(t)p\sigma^2(v(t)), \dots .$$

Очевидно, область определения $\mathcal{D}(V_k)$ каждого оператора V_k не пуста и справедливы включения $\mathcal{D}(V_1) \supset \mathcal{D}(V_2) \supset ... \supset \mathcal{D}(V_k) \supset ... .$

Далее важное значение имеет случай $k = n$. Поэтому приведем простое описание множества $\mathcal{D}(V_n)$, выраженное в терминах квазидифференцирования. Для любой функции $v \in C_n$ зададим нижнетреугольную $((n + 1) \times (n + 1))$-матрицу

$$P(v(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -v_1(t) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -v_2(t) & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -v_n(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Лемма 2. *Тройка (A, c, v) принадлежит области определения оператора V_n тогда и только тогда, когда каждая выходная функция $y(t)$ системы (A, c) n раз непрерывно квазидифференцируема относительно матрицы $P(t) = P(v(t))$.*

Доказательство. Достаточность. Используя определение квазидифференцируемости относительно матрицы $P(t)$, приведенное в [2, 3], получим, что функция

$$ {}^1_P y(t) = \frac{d\Big(c(t)x(t)\Big)}{dt} - v_1(t)c(t)x(t)$$

существует и непрерывна. Следовательно, строка $c(t)$ непрерывно дифференцируема и

$$ {}^1_P y(t) = \Big(\dot{c}(t) + c(t)A(t) - v_1(t)c(t)\Big)x(t).$$

Поэтому $(A, c, v) \in \mathcal{D}(V_1)$. Аналогично, учитывая непрерывность квазипроизводной

$$ {}^2_P y(t) = \frac{d\Big({}^1_P y(t)\Big)}{dt} - v_2(t){}^0_P y(t) =$$

$$= \left[\frac{d\Big(\dot{c}(t) + c(t)A(t) - v_1(t)c(t)\Big)}{dt} + \Big(\dot{c}(t) + c(t)A(t) - v_1(t)c(t)\Big)A(t) - v_2(t)c(t)\right]x(t),$$

убедимся, что $(A, c, v) \in \mathcal{D}(V_2)$. Продолжая такие же рассуждения далее, без труда придем к требуемому включению $(A, c, v) \in \mathcal{D}(V_n)$.

Необходимость обосновывается путем "обращения" рассуждений, примененных при установлении достаточности. Лемма доказана.

Рассмотрим уравнение

$$V_n(A,c,v)(t) = 0 \tag{9}$$

относительно неизвестного $v \in C_n$. Из соотношений (6), (7) и построения оператора $V_n(A,c,v)(t)$ легко вытекает, что если система (1) обладает канонической формой (2), то вектор-функция

$$v(t) = (\alpha_{n-1}(t), \alpha_{n-2}(t), ..., \alpha_0(t))$$

является решением этого уравнения. Поэтому справедлив следующий признак отсутствия канонической формы.

Теорема 1. *Пара* $(A,c) \in \Sigma_n$ *не имеет канонической формы, если либо множество* $\mathcal{D}_{A,c}(V_n) = \{v \in C_n : (A,c,v) \in \mathcal{D}(V_n)\}$ *пусто либо уравнение* (9) *неразрешимо.*

Пример 1. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная, но не дифференцируемая во всех точках $t \in T$ вещественная функция. Система

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \varphi(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

не имеет канонической формы, так как множество $\mathcal{D}_{A,c}(V_3)$ пусто.

Пример 2. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная положительная функция, не имеющая производной ни в одной точке отрезка $[\xi_0, t_1]$, $t_0 > \xi_0$. Положим

$$g(t) = \int\limits_{\xi_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau, \quad \psi(t) = 1/g(t), \quad t \in T,$$

и рассмотрим систему наблюдения второго порядка

$$A(t) = \begin{pmatrix} g(t) & \varphi(t)\psi(t) \\ \varphi(t)\psi(t) & 2g(t) \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} g(t), & -g(t) \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что для нее множество $\mathcal{D}_{A,c}(V_2)$ состоит из строк $(v_1(t), v_2(t))$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами $v_1(t)$, т.е. не является пустым. Однако уравнение (9) решений не имеет и поэтому по теореме 1 пара (A,c) не обладает канонической формой.

4. Случай неединственности решения уравнения (9). Теорема 1 описывает два фактора, препятствующих существованию канонической формы: пустота множества $\mathcal{D}_{A,c}(V_n)$ (а значит, и невозможность построения строки $V_n(A,c,v)(t)$) и неразрешимость уравнения (9). Поэтому далее будем исследовать случаи, когда $\mathcal{D}_{A,c}(V_n) \neq \emptyset$ и уравнение (9) имеет решение.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда решение неединственно. Для этого, в дополнение к работе [2], выясним зависимость условий наблюдаемости от выбора матрицы $P(t)$, относительно которой система (1) принадлежит классу $\{P, n-1\}$ (см. [2]).

Обозначим через $\mathcal{P}_n(A,c)$ семейство всех нижнетреугольных непрерывных матриц $P(t) = (p_{ki}(t))$ $(i,k = 0,1,...,n)$ размера $((n+1)\times(n+1))$, удовлетворяющих условию $p_{kk}(t) \neq 0$ при $t \in T$ $(k = 0,1,...,n)$, относительно которых все выходные функции системы (1) $n-1$ раз непрерывно квазидифференцируемы [2]. Заметим, что для некоторых систем (A,c) множество $\mathcal{P}_n(A,c)$ может быть пустым. Однако, если оно не пусто, то в нем содержится более одного элемента (хотя бы потому, что вместе с $P \in \mathcal{P}_n(A,c)$ множеству $\mathcal{P}_n(A,c)$ принадлежит и произведение PW при любой нижнетреугольной матрице W с непрерывно дифференцируемыми элементами $w_{ki}(t)$, $w_{kk}(t) \neq 0$).

Для любого $P \in \mathcal{P}_n(A,c)$ определим строки

$$s_0(t) = p_{00}(t)c(t), \quad s_1(t) = p_{11}(t)\left[s_0(t)A(t) + \dot{s}_0(t)\right] + p_{10}(t)s_0(t),$$
$$s_k(t) = p_{kk}(t)\left[s_{k-1}(t)A(t) + \dot{s}_{k-1}(t)\right] + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_i(t) \quad (k = 2,3,...,n-1) \tag{10}$$

и, следуя [2], составим матрицу наблюдаемости

$$S_P(t) = \begin{pmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ \dots \\ s_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. *При каждом $t \in T$ все матрицы $S_P(t)$ $(P \in \mathcal{P}_n(A,c))$ одновременно либо вырождены либо невырождены.*

Доказательство. Пусть $s_j^P(t)$ и $s_j^W(t)$ $(j = 0,1,...,n-1)$ — вектор-функции, построенные по правилам (10) с помощью матриц $P(t) = (p_{ki}(t))$ и $W(t) = (w_{ki}(t))$ из множества $\mathcal{P}_n(A,c)$. Так как $p_{kk}(t) \neq 0$, $w_{kk}(t) \neq 0$ при $t \in T$ и $s_0^P(t) = p_{00}(t)c(t)$, $s_0^W(t) = w_{00}(t)c(t)$, то

$$s_0^W(t) = \frac{w_{00}(t)}{p_{00}(t)} s_0^P(t) = f_{00}(t)s_0^P(t), \quad f_{00}(t) = \frac{w_{00}(t)}{p_{00}(t)}.$$

Далее, поскольку по определению квазипроизводных, функции $f_{00}(t)$ и $s_0^P(t)$ непрерывно дифференцируемы, то простые вычисления приводят к формуле

$$s_1^W(t) = f_{11}(t)s_1^P(t) + f_{10}(t)s_0^P(t),$$

где $f_{11}(t)$, $f_{10}(t)$ — непрерывные функции, зависящие от элементов $p_{ij}(t)$, $w_{ij}(t)$, причем $f_{11}(t) \neq 0$ при $t \in T$. Используя метод математической индукции можно доказать, что и при любом $k = 1,2,...,n-1$ верны соотношения

$$s_k^W(t) = f_{kk}(t)s_k^P(t) + f_{k,k-1}(t)s_{k-1}^P(t) + ... + f_{k0}(t)s_0^P(t),$$

в которых $f_{kj}(t)$ — непрерывные на T функции, вычисленные по параметрам матриц $P(t)$ и $W(t)$, причем $f_{kk}(t) \neq 0$ для $t \in T$. Поэтому

$$S_W(t) = \begin{pmatrix} f_{00}(t)s_0^P(t) \\ f_{11}(t)s_1^P(t) + f_{10}(t)s_0^P(t) \\ \dots \\ f_{n-1,\,n-1}(t)s_{n-1}^P(t) + f_{n-1,\,n-2}(t)s_{n-2}^P(t) + \ldots + f_{n-1,\,0}(t)s_0^P(t) \end{pmatrix},$$

откуда следует равенство $\det S_W(t) = f_{00}(t)f_{11}(t)...f_{n-1,\,n-1}(t)\det S_P(t)$, доказывающее лемму.

Замечание. В работе [2] показано, что если для какой-либо $P \in \mathcal{P}_n(A,c)$ матрица $S_P(t)$ невырождена в некоторой точке $t = \sigma \in T$ (при всех $t \in T$, при почти всех $t \in T$), то система (1) наблюдаема (равномерно наблюдаема, дифференциально наблюдаема). Лемма 3 утверждает, что сформулированные факты не зависят от выбора матрицы $P \in \mathcal{P}_n(A,c)$, т.е. если наблюдаемость (равномерная наблюдаемость, дифференциальная наблюдаемость) установлена с помощью какой-то матрицы $P(t)$, то это же свойство обнаруживается и с помощью любой другой матрицы из множества $\mathcal{P}_n(A,c)$.

Теорема 2. *Если уравнение* (9) *разрешимо, но его решение неединственно, то система* (1) *не имеет канонической формы.*

Доказательство. Пусть существуют два различных решения

$$v^1(t) = (v_1^1(t), v_2^1(t), ..., v_n^1(t)), \quad v^2(t) = (v_1^2(t), v_2^2(t), ..., v_n^2(t))$$

уравнения (9). Используя функции $v^1(t)$ и $v^2(t)$ построим две канонические системы

$$A_j^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & v_n^j(t) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & v_{n-1}^j(t) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & v_{n-2}^j(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & v_1^j(t) \end{pmatrix}, \quad c^0 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

По формулам (6) при $\alpha_{n-i}(t) = v_i^j(t)$ определим строки $q_i^j(t)$ $(i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2)$ и из них составим матрицы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$. В силу леммы 1 и единственности канонической формы хотя бы одна из матриц $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ особая при каком-то $t = \tau \in T$. Согласно лемме 2 все выходные функции системы (1) квазидифференцируемы относительно матриц $P(t) = P(v^1(t))$, $W(t) = P(v^2(t))$, заданных формулой (8). Кроме того, легко убедиться, что $S_P(t) = Q_1(t)$, $S_W(t) = Q_2(t)$. Поэтому в силу леммы 3 обе матрицы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ вырождены в точке $t = \tau$. Значит по лемме 1 канонической формы нет. Теорема доказана.

Следствие. *Если уравнение* (9) *разрешимо неоднозначно, то для любого его решения* $v(t)$ *матрица* $Q(t)$, *найденная по формулам* (6) *при* $\alpha_{n-i}(t) = v_i(t)$, *вырождена хотя бы при одном* $t \in T$.

Пример 3. Рассмотрим систему второго порядка

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} e^t, & e^t \end{pmatrix}.$$

В данном случае множество $\mathcal{D}_{A,c}(V_2)$ не пусто, но уравнение (9) имеет семейство решений $v_1(t) = \gamma$, $v_2(t) = 1 - \gamma$, где γ — произвольное действительное число. Поэтому по теореме 2 для пары (A, c) не существует канонической формы.

5. Случай однозначной разрешимости уравнения (9)**.** Пусть для системы (A, c) уравнение (9) построено. Обозначим через $\mathcal{Q}_n(A, c)$ подмножество множества $\mathcal{P}_n(A, c)$, состоящее из элементов, относительно которых каждая выходная функция системы (1) n раз непрерывно квазидифференцируема. В силу леммы 2 множество $\mathcal{Q}_n(A, c)$ не пусто.

Выберем какую-либо матрицу $P \in \mathcal{Q}_n(A, c)$ и предположим, что пара $(A, c) \in \Sigma_n$ равномерно наблюдаема относительно $P(t)$ [2]. В силу леммы 3 она будет равномерно наблюдаемой и при любой $P \in \mathcal{Q}_n(A, c)$. Поэтому далее будем говорить просто о равномерной наблюдаемости.

Пусть пара $(A, c) \in \Sigma_n$ фиксирована и $P \in \mathcal{Q}_n(A, c)$. Обозначим через Σ_n^R часть множества Σ_n, состоящую из всех равномерно наблюдаемых систем класса $\{P, n\}$ [2]. Очевидно, семейство Σ_n^R инвариантно относительно действия группы $\mathcal{G}_n$, т.е. вместе с каждой парой $(B, d) \in \Sigma_n^R$ множеству Σ_n^R принадлежит и элемент $G * (B, d)$, $G \in \mathcal{G}_n$. Для любой системы $(B, d) \in \Sigma_n^R$ построим строки $s_0(t)$, $s_1(t)$, ..., $s_{n-1}(t)$, $s_n(t)$ по правилам (10), т.е.

$$s_0(t) = p_{00}(t)d(t), s_k(t) = p_{kk}(t)\left[s_{k-1}(t)B(t) + \dot{s}_{k-1}(t)\right] + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_i(t) \ (k = 1, 2, \ldots, n), \quad (12)$$

сформируем ее матрицу наблюдаемости $S_P(t)$ и зададим отображение $f_P : \Sigma_n^R \longrightarrow C_n$, положив

$$f_P(B, d)(t) = s_n(t)S_P^{-1}(t) \quad (13)$$

(существование обратной матрицы $S_P^{-1}(t)$ следует из равномерной наблюдаемости системы (B, d)).

Лемма 4. *Отображение f_P является полным инвариантом действия группы $\mathcal{G}_n$ на множестве Σ_n^R, т.е. оно постоянно на каждой орбите и принимает различные значения на разных орбитах.*

Доказательство. Пусть $(B, d) \in \Sigma_n^R$ и $(B_1, d_1) = G * (B, d)$, $G \in \mathcal{G}_n$. Несложно показать, что $s_n^1(t) = s_n(t)G(t)$ и $S_P^1(t) = S_P(t)G(t)$, где $s_n^1(t)$ и $S_P^1(t)$ — строка и матрица, вычисленные для системы (B_1, d_1) по формулам (12). Так как $G(t) = \left(S_P(t)\right)^{-1} S_P^1(t)$, то $s_n^1(t) \left(S_P^1(t)\right)^{-1} = s_n(t) \left(S_P(t)\right)^{-1}$, т.е. отображение f_P постоянно на каждой орбите $\mathcal{O}(B, d)$.

Покажем, что если

$$\mathcal{O}(B, d) \neq \mathcal{O}(B_1, d_1), \quad (14)$$

то функции $f_P(B, d)(t)$ и $f_P(B_1, d_1)(t)$ отличаются хотя бы в одной точке $t \in T$. Предположим противное: $f_P(B, d)(t) = f_P(B_1, d_1)(t)$ при любом $t \in T$. Тогда, как легко убедиться, выполняется равенство

$$\left[\mathrm{diag}\{p_{11}(t), p_{22}(t), ..., p_{nn}(t)\} \left(S_P^1(t)B_1(t) + \dot{S}_P^1(t)\right) + \widetilde{P}(t)S_P^1(t)\right] \left(S_P^1(t)\right)^{-1} =$$

$$= \left[\operatorname{diag}\{p_{11}(t), p_{22}(t), ..., p_{nn}(t)\} \left(S_P(t)B(t) + \dot{S}_P(t)\right) + \widetilde{P}(t)S_P(t)\right] (S_P(t))^{-1},$$

где

$$\widetilde{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{10}(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & \dots & 0 & 0 \\ p_{30}(t) & p_{31}(t) & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ p_{n0}(t) & p_{n1}(t) & \dots & p_{n,n-2}(t) & p_{n,n-1}(t) \end{pmatrix}$$

и $p_{ij}(t)$ — элементы матрицы $P(t)$. Поэтому

$$B_1(t) = \left(S_P^1(t)\right)^{-1} \left[S_P(t)B(t)\left(S_P(t)\right)^{-1} S_P^1(t) + \dot{S}_P(t)\left(S_P(t)\right)^{-1} S_P^1(t) - \dot{S}_P^1(t)\right]. \qquad (15)$$

Положим $G(t) = (S_P(t))^{-1} S_P^1(t)$. Так как системы (B, d) и (B_1, d_1) принадлежат классу $\{P, n\}$ [2], то матрица $G(t)$ непрерывно дифференцируема и для нее справедливо тождество

$$G^{-1}(t)\dot{G}(t) = \left(S_P^1(t)\right)^{-1} [\dot{S}_P^1(t) - \dot{S}_P(t)\left(S_P(t)\right)^{-1} S_P^1(t)],$$

из которого в силу соотношения (15) вытекает, что

$$B_1(t) = G^{-1}(t)B(t)G(t) - G^{-1}(t)\dot{G}(t), \quad d_1(t) = d(t)G(t).$$

Значит орбиты $\mathcal{O}(B, d)$ и $\mathcal{O}(B_1, d_1)$ совпадают, а это противоречит требованию (14). Следовательно, функции $f_P(B, d)(t)$ и $f_P(B_1, d_1)(t)$ различны на множестве T. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если система $(A, c) \in \Sigma_n$ равномерно наблюдаема и уравнение* (9) *разрешимо, то решение единственно.*

Доказательство. Пусть система (A, c) равномерно наблюдаема, но уравнение (9) имеет различные решения $v^1(t)$ и $v^2(t)$. Построим две канонические пары (11) и две матрицы $P_j(t) = P(v^j(t))$ $(j = 1, 2)$. Легко убедиться, что каждая система (A_j^0, c^0) принадлежит классу $\{P_j, n\}$ и строки ее матрицы наблюдаемости $S_{P_j}(t)$ имеют вид $(0, 0, \dots, 0, 1)$, $(0, 0, \dots, 1, 0)$, …, $(1, 0, \dots, 0, 0)$. Поэтому $(A_j^0, c^0) \in \Sigma_n^R$. Кроме того, простые вычисления приводят к равенству $f_{P_j}(A_j^0, c^0)(t) = 0$ $(t \in T)$. Далее, поскольку вектор-функции $v^1(t)$ и $v^2(t)$ удовлетворяют уравнению (9), то из условия (7) вытекает, что $s_n^j(t) = 0$, где $s_n^j(t)$ — строки, найденные из формул (10) при $k = n$, $P(t) = P_j(t)$. Значит $f_{P_j}(A, c)(t) = 0$. В силу леммы 4 системы (A, c) и (A_j^0, c^0) лежат в одной орбите, а это противоречит единственности канонической формы. Лемма доказана.

Замечание. Пример 3 показывает, что при отсутствии равномерной наблюдаемости уравнение (9) может иметь бесконечное множество различных решений, а пример 2 иллюстрирует, что равномерная наблюдаемость не гарантирует его разрешимость. Однако по лемме 5 сочетание равномерной наблюдаемости и разрешимости приводит к единственности решения.

Возвратимся к основному вопросу данной работы — существованию канонической формы у заданной пары $(A, c) \in \Sigma_n$. Сначала заметим следующее. Как показано в [2], для каждой канонической системы (2) существует $(n \times n)$-матрица $Q(t)$, относительно которой она имеет класс $\{Q, n\}$ и является равномерно наблюдаемой. Поскольку свойство равномерной наблюдаемости сохраняется при действии группы $\mathcal{G}_n$, то всякая система (A, c), обладающая канонической формой, должна быть равномерно наблюдаемой, т.е. равномерная наблюдаемость — необходимое условие существования канонической формы. Поэтому далее рассматриваются только системы из множества Σ_n^R.

Теорема 3. *Равномерно наблюдаемая система* (1) *имеет каноническую форму, если и только если уравнение* (9) *разрешимо (и тогда его решение единственно).*

Доказательство. Достаточность следует из леммы 5. Необходимость. Пусть равномерно наблюдаемая система (A, c) имеет каноническую форму (2). Тогда найдется такой элемент $G(t)$ группы $\mathcal{G}_n$, что $G * (A, c) = (A^0, c^0)$, при этом строки $q_i(t)$ матрицы $G^{-1}(t)$ удовлетворяют соотношениям (6), (7). Так как равенство (7) при замене функций $\alpha_i(t)$ на неизвестные $v_{n-i}(t)$ совпадает с уравнением (9), то уравнение (9) имеет решение $v(t) = (\alpha_{n-1}(t), \alpha_{n-2}(t), \ldots, \alpha_0(t))$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает следующий вывод: если уравнение (9) для равномерно наблюдаемой пары $(A, c) \in \Sigma_n$ имеет решение $v^* \in C_n$, то это решение единственно, каноническая форма существует и ее коэффициенты определяется условиями $\alpha_{n-i}(t) = v_i^*(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$, а матрица $Q(t)$, построенная по формулам (6), невырождена при всех $t \in T$.

Для проверки того, является ли заданная пара (2) канонической формой для системы $(A, c) \in \Sigma_n$ можно поступить следующим образом.

1. Построим матрицу $P(t)$ по правилу (8) при $v_i(t) = \alpha_{n-i}(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

2. По рекуррентным формулам (10) найдем элементы $s_i(t)$. Если при каком-то $i^* < n$ строка $s_{i^*}(t)$ неопределена, то пара (A^0, c^0) не является канонической для системы (A, c).

3. Пусть строки $s_i(t)$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ существуют. Сформируем из них матрицу наблюдаемости $S_P(t)$ и вычислим ее определитель. Когда он равен нулю хотя бы при одном $t \in T$, то система (A, c) не имеет канонической формы.

4. Пусть $\det S_P(t) \neq 0$ на множестве T и определена строка $s_n(t)$. Тогда пара (A^0, c^0) — каноническая форма для системы (A, c), если и только если $s_n(t) = 0$ для любого $t \in T$.

Замечание. Для пары (A, c) из примера 1 шаг **2** невыполним и поэтому для нее нет канонической формы. В примере 3 отсутствие канонической формы обнаруживается на шаге **3** (там нет равномерой наблюдаемости). Система из примера 2 успешно проходит тесты на первых трех шагах, однако $s_3(t) \neq 0$ $(t \in T)$ и, следовательно, она не обладает канонической формой.

6. Случай $n = 2$. Проиллюстрируем предложенный метод построения канонической формы на примере системы второго порядка

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t), & c_2(t) \end{pmatrix} \tag{16}$$

с непрерывными на отрезке T коэффициентами $a_{ij}(t)$, $c_i(t)$. Сначала проведем некоторые упрощения. Из формул (6) вытекает, что функции $c_i(t)$ обязаны быть непререрывно дифференцируемыми, а требование равномерной наблюдаемости приводит к условию $c(t) \neq 0$ $(t \in T)$. Поэтому матрица

$$G(t) = \begin{pmatrix} c_2(t) & c_1(t) \\ -c_1(t) & c_2(t) \end{pmatrix}$$

принадлежит группе $\mathcal{G}_2$ и $G * (A, c) = (B, c^0)$, где

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad c^0 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Значит, без ограничения общности, вместо системы (16) можно изучать систему (17).

Оператор V_1 для пары (17) задается равенством

$$V_1(B, c^0, v)(t) = (b_{21}(t), b_{22}(t) - v_1(t)).$$

Следовательно область определения $\mathcal{D}(V_2)$ оператора V_2 состоит из таких троек (B, c^0, v), у которых функции $b_{21}(t)$ и $b_{22}(t) - v_1(t)$ непрерывно дифференцируемы на T, и для любого элемента $(B, c^0, v) \in \mathcal{D}(V_2)$ справедлива формула

$$V_2(B, c^0, v)(t) = \Bigg(\dot{b}_{21}(t) + b_{11}(t)b_{21}(t) + b_{21}(t)b_{22}(t) - b_{21}(t)v_1(t),$$

$$\frac{d(b_{22}(t) - v_1(t))}{dt} + b_{12}(t)b_{21}(t) + b_{22}^2(t) - b_{22}(t)v_1(t) - v_2(t)\Bigg).$$

Легко убедиться, что система (B, c^0) принадлежит классу $\{P, 1\}$ относительно матрицы

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v_1(t) & 1 & 0 \\ -v_2(t) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и ее матрица наблюдаемости $S_P(t)$ равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) - v_1(t) \end{pmatrix}.$$

Следовательно равномерная наблюдаемость имеет место тогда и только тогда, когда $b_{21}(t) \neq 0$ для любого $t \in T$.

Рассмотрим уравнение $V_2(B, c^0, v)(t) = 0$. Простой анализ показывает, что в случае равномерной наблюдаемости оно однозначно разрешимо и решение задается соотношениями

$$\begin{gathered} v_1(t) = \frac{\dot{b}_{21}(t)}{b_{21}(t)} + b_{11}(t) + b_{22}(t), \\ v_2(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{b}_{21}(t)}{b_{21}(t)} + b_{11}(t)\right) - b_{22}(t)\left(\frac{\dot{b}_{21}(t)}{b_{21}(t)} + b_{11}(t)\right) + b_{12}(t)b_{21}(t). \end{gathered} \tag{18}$$

Поэтому справедлива

Лемма 6. *Система (17) обладает канонической формой в том и только в том случае, когда* $b_{21}(t) \neq 0$ $(t \in T)$ *и функции*

$$b_{21}(t), \quad \frac{\dot{b}_{21}(t)}{b_{21}(t)} + b_{11}(t) \tag{19}$$

непрерывно дифференцируемы на T*; коэффициенты* $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ *канонической формы определяются равенствами* $\alpha_0(t) = v_2(t)$, $\alpha_1(t) = v_1(t)$, *где* $v_1(t)$, $v_2(t)$ *— функции* (18).

Замечание. Наиболее сильные условия существования канонической формы, полученные ранее, содержатся в работе [4]. Применение их к системе (17) приводит к непрерывной дифференцируемости не только функций (18), но и функции $b_{22}(t)$. Таким образом, установленные выше результаты расширяют класс систем, заведомо обладающих каноническими формами.

Литература

1. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. М.: Едиториал УРСС. 2004.

2. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, №11, С. 1567 - 1576.

3. *Дерр В.Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 1999. Вып. 1(16). С.3 - 105.

4. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1998. №7. С. 3 - 13.