

УДК 519.63

М. М. ЧУЙКО

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск

Поступило 26.01.2009

При исследовании разностных схем основное внимание уделяется вопросу устойчивости разностного решения относительно малого возмущения входных данных задачи. К настоящему времени наиболее полные результаты получены для вычислительных методов, аппроксимирующих линейные задачи математической физики [1]. Принципиальное отличие исследования устойчивости в нелинейном случае заключается в необходимости дополнительного получения априорных оценок для всех производных, входящих в нелинейную часть разностных уравнений.

Первые строгие результаты по исследованию устойчивости решений разностных схем для нелинейного уравнения переноса, уравнения Бюргерса и квазилинейного уравнения теплопроводности приведены в работах [2; 3]. В [4] исследовалась устойчивость по начальным данным и сходимость в равномерной норме разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений слабосжимаемой жидкости. В [5] получены априорные оценки устойчивости и сходимости линейаризованных разностных схем, аппроксимирующих начально-краевую задачу для изэнтропических сверхзвуковых течений газа.

Цель работы – исследование устойчивости по начальным данным и сходимости разностных схем, аппроксимирующих уравнения газовой динамики в инвариантах Римана для дозвуковых течений.

В данной работе получены условия на начальные данные, позволяющие с течением времени гарантировать наличие в среде лишь дозвуковых течений и отсутствие ударных волн. Нарушение этих условий приводит либо к возникновению в процессе счета сверхзвуковых течений и неустойчивому решению разностных схем, либо к образованию ударных волн. Приведены результаты вычислительного эксперимента, подтверждающие полученные теоретические выводы.

Постановка задачи и разностная схема. В прямоугольнике $(x, t) \in \bar{Q}_T$, $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$, $\bar{\Omega} = \{x : 0 \leq x \leq l\}$, рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнений политропного газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) = 0, \quad (x, t) \in Q_T; \quad (1)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} = c > 0, \quad \gamma = 1;$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (2)$$

$$v(0, t) + \sqrt{c} \ln \rho(0, t) = \mu_1(t), \quad v(l, t) - \sqrt{c} \ln \rho(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где $v = v(x, t)$, $\rho = \rho(x, t)$, $p = p(x, t)$ – соответственно скорость, плотность и давление.

Предположим, что начальные условия (2) удовлетворяют неравенствам

$$\|v_0\|_{C[0, l]} + \sqrt{c} \|\ln \rho_0\|_{C[0, l]} < \sqrt{c}; \quad (4)$$

$$0 \leq v'_0(x) + \frac{\sqrt{c}}{\rho_0(x)} \rho'_0(x) \leq c_0; \quad 0 \leq v'_0(x) - \frac{\sqrt{c}}{\rho_0(x)} \rho'_0(x) \leq c_1, \quad (5)$$

где $\|f\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0,l]} |f(x)|$.

Система дифференциальных уравнений (1) является гиперболической и краевые условия (3) поставлены корректно лишь для дозвуковых течений $|v(x,t)| < \sqrt{c}$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$. Вводя инварианты Римана [6] $r = v + \sqrt{c} \ln \rho$, $s = v - \sqrt{c} \ln \rho$, дифференциальную задачу (1)–(3) запишем в эквивалентном виде

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (v + \sqrt{c}) \frac{\partial r}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial t} + (v - \sqrt{c}) \frac{\partial s}{\partial x} = 0; \quad (6)$$

$$r(x, 0) = r_0(x) = v_0(x) + \sqrt{c} \ln \rho_0(x); \quad s(x, 0) = s_0(x) = v_0(x) - \sqrt{c} \ln \rho_0(x); \quad (7)$$

$$r(0, t) = \mu_1(t); \quad s(l, t) = \mu_2(t). \quad (8)$$

В области $\bar{Q}_T$ введем равномерную сетку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$: $\bar{\omega}_h = \{x_i : x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad hN = l\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_n : t_n = n\tau, \quad n = \overline{0, N_0}, \quad \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{0\}$ с постоянными шагами h и τ по пространственной и временной переменной соответственно. Будем использовать стандартные обозначения теории разностных схем [1]:

$$y = y_i^n = y(x_i, t_n); \quad \hat{y} = y_i^{n+1} = y(x_i, t_{n+1}); \quad y_{\bar{x}, i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}; \quad y_{x, i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}; \quad y_{t, i} = \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau}.$$

На разностной сетке $\bar{\omega}$ дифференциальную задачу в инвариантах Римана (6)–(8) аппроксимируем линеаризованной разностной схемой

$$r_{ht, i} + (v_{h, i} + \sqrt{c}) \hat{r}_{h\bar{x}, i} = 0, \quad i = \overline{1, N}; \quad s_{ht, i} + (v_{h, i} - \sqrt{c}) \hat{s}_{hx, i} = 0, \quad i = \overline{0, N-1}; \quad (9)$$

$$r_{h, i}^0 = v_{0, i} + \sqrt{c} \ln \rho_{0, i}, \quad s_{h, i}^0 = v_{0, i} - \sqrt{c} \ln \rho_{0, i}, \quad i = \overline{0, N}; \quad (10)$$

$$\hat{r}_{h, 0} = \mu_1(t_{n+1}), \quad \hat{s}_{h, N} = \mu_2(t_{n+1}), \quad n = \overline{0, N_0 - 1}, \quad (11)$$

которая является схемой бегущего счета

$$(1 + \gamma(v_{h, i}^n + \sqrt{c})) r_{h, i}^{n+1} = \gamma(v_{h, i}^n + \sqrt{c}) r_{h, i-1}^{n+1} + r_{h, i}^n, \quad i = \overline{1, N};$$

$$(1 + \gamma(\sqrt{c} - v_{h, i}^n)) s_{h, i}^{n+1} = \gamma(\sqrt{c} - v_{h, i}^n) s_{h, i+1}^{n+1} + s_{h, i}^n, \quad i = \overline{0, N-1},$$

где $\gamma = \tau/h$, $v_h = (r_h + s_h)/2$.

Исследование устойчивости. Наряду с задачей (9)–(11) рассмотрим возмущенную задачу

$$\tilde{r}_{ht, i} + (\tilde{v}_{h, i} + \sqrt{c}) \hat{\tilde{r}}_{h\bar{x}, i} = 0, \quad i = \overline{1, N}; \quad \tilde{s}_{ht, i} + (\tilde{v}_{h, i} - \sqrt{c}) \hat{\tilde{s}}_{hx, i} = 0, \quad i = \overline{0, N-1}; \quad (12)$$

$$\tilde{r}_{h, i}^0 = \tilde{v}_{0, i} + \sqrt{c} \ln \tilde{\rho}_{0, i}, \quad \tilde{s}_{h, i}^0 = \tilde{v}_{0, i} - \sqrt{c} \ln \tilde{\rho}_{0, i}, \quad i = \overline{0, N}; \quad (13)$$

$$\hat{\tilde{r}}_{h, 0} = \mu_1(t_{n+1}), \quad \hat{\tilde{s}}_{h, N} = \mu_2(t_{n+1}), \quad n = \overline{0, N_0 - 1}. \quad (14)$$

Пусть для возмущенных начальных данных $\tilde{v}_0, \tilde{\rho}_0$ выполняются неравенства, аналогичные неравенствам (4), (5),

$$\|\tilde{v}_0\|_{C[0,l]} + \sqrt{c} \|\ln \tilde{\rho}_0\|_{C[0,l]} < \sqrt{c}; \quad (15)$$

$$0 \leq \tilde{v}'_0(x) + \frac{\sqrt{c}}{\tilde{\rho}_0(x)} \tilde{\rho}'_0(x) \leq c_0; \quad 0 \leq \tilde{v}'_0(x) - \frac{\sqrt{c}}{\tilde{\rho}_0(x)} \tilde{\rho}'_0(x) \leq c_1. \quad (16)$$

Вычитая из (12)–(14) соответствующие уравнения (9)–(11), получим задачу для возмущений $\delta r_i = \tilde{r}_{h,i} - r_{h,i}$, $\delta s_i = \tilde{s}_{h,i} - s_{h,i}$:

$$\delta r_{i,i} + (v_{h,i} + \sqrt{c}) \delta \hat{r}_{\bar{x},i} + 0,5 \hat{r}_{h\bar{x},i} (\delta r_i + \delta s_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\delta s_{i,i} + (v_{h,i} - \sqrt{c}) \delta \hat{s}_{x,i} + 0,5 \hat{s}_{hx,i} (\delta r_i + \delta s_i) = 0, \quad i = 0, \dots, N-1;$$

$$\delta \hat{r}_0 = 0, \quad \delta \hat{s}_N = 0, \quad \delta r_i^0 = \delta v_{0,i} + \sqrt{c} \delta (\ln \rho_{0,i}), \quad \delta s_i^0 = \delta v_{0,i} - \sqrt{c} \delta (\ln \rho_{0,i}), \quad i = \overline{1, N}.$$

В дальнейшем будем использовать следующие сеточные нормы:

$$\|y_h\|_{C^+} = \max_{1 \leq i \leq N} |y_{h,i}|, \quad \|y_h\|_{C^-} = \max_{0 \leq i \leq N-1} |y_{h,i}|, \quad \|y_h\|_{\bar{C}} = \max_{0 \leq i \leq N} |y_{h,i}|.$$

О п р е д е л е н и е. Разностная схема (9)–(11) называется абсолютно устойчивой по начальным данным в равномерной норме, если существует постоянная $M > 0$, не зависящая от τ , h и выбора входных данных v_0 , $\tilde{v}_0$, ρ_0 , $\tilde{\rho}_0$, такая что

$$\|\tilde{r}_h^n - r_h^n\|_{\bar{C}} + \|\tilde{s}_h^n - s_h^n\|_{\bar{C}} \leq M \left(\|\tilde{r}_h^0 - r_h^0\|_{\bar{C}} + \|\tilde{s}_h^0 - s_h^0\|_{\bar{C}} \right) \quad (17)$$

для произвольных τ , h и всех $t_n \in \bar{\omega}_\tau$.

Для простоты дальнейших исследований будем предполагать, что граничные условия однородны, т. е. $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$, $0 < t \leq T$. Из задачи для возмущений δr_i , δs_i следует, что для получения априорной оценки вида (17) необходимо исследовать свойства как приближенного решения v_h , так и первых производных $\tilde{r}_{h\bar{x}}$, $\tilde{s}_{hx}$. Используя технику исследования устойчивости нелинейных разностных схем для уравнений слабосжимаемой жидкости [2], можно доказать следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. Пусть выполнено условие (4). Тогда для решения разностной схемы (9)–(11) имеют место оценки $\|r_h^n\|_{\bar{C}} \leq \|v_0 + \sqrt{c} \ln \rho_0\|_{\bar{C}}$, $\|s_h^n\|_{\bar{C}} \leq \|v_0 - \sqrt{c} \ln \rho_0\|_{\bar{C}}$, $\|v_h^n\|_{\bar{C}} < \sqrt{c}$, $n = \overline{0, N_0}$.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия (15), (16). Тогда для производных решения разностной схемы (12)–(14) имеют место оценки

$$\|\tilde{r}_{h\bar{x}}^n\|_{C^+} \leq \|\tilde{v}_{0\bar{x}} + \sqrt{c} (\ln \tilde{\rho}_0)_{\bar{x}}\|_{C^+} \leq c_0, \quad \|\tilde{s}_{hx}^n\|_{C^-} \leq \|\tilde{v}_{0x} - \sqrt{c} (\ln \tilde{\rho}_0)_x\|_{C^-} \leq c_1, \quad n = \overline{0, N_0}.$$

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия (4), (5), (15), (16). Тогда разностная схема (9)–(11) устойчива по начальным данным и для ее решения справедлива оценка

$$\|\tilde{r}_h^{n+1} - r_h^{n+1}\|_{\bar{C}} + \|\tilde{s}_h^{n+1} - s_h^{n+1}\|_{\bar{C}} \leq e^{0,5T(c_0+c_1)} \left(\|\delta v_0 + \sqrt{c} \delta (\ln \rho_0)\|_{\bar{C}} + \|\delta v_0 - \sqrt{c} \delta (\ln \rho_0)\|_{\bar{C}} \right). \quad (18)$$

Т е о р е м а 4. Пусть существует решение $r(x, t), s(x, t) \in C^{2,2}(\bar{Q}_T)$ задачи (6)–(8), тогда решение разностной схемы (9)–(11) сходится к решению дифференциальной задачи (6)–(8) и имеет место следующая оценка точности

$$\|\tilde{r}_h^{n+1} - r^{n+1}\|_{\bar{C}} + \|\tilde{s}_h^{n+1} - s^{n+1}\|_{\bar{C}} \leq c_2 t_{n+1} (h + \tau).$$

Здесь константа $c_2 > 0$ не зависит от h , τ и приближенного решения.

Условия (4), (15) на начальные данные являются достаточными для ограниченности решения и наличия в среде лишь дозвуковых течений, а условия (5), (16) на производные начальных данных фактически предполагают отсутствие областей с большими градиентами. Однако вне зависимости от гладкости входных данных, нелинейность системы уравнений может порождать воз-

никновение ударных волн [6]. Поэтому несомненный интерес представляет анализ устойчивости разностных схем без указанных выше предположений на производные начальных данных.

Введем в рассмотрение сеточную норму для производных $Q^n = 0,5 \left(\|\tilde{r}_{hx}^n\|_{C^+} + \|\tilde{s}_{hx}^n\|_{C^-} \right)$. Тогда при выполнении н равенства (15) можно получить оценку вида $Q^n \leq Q^0 / (1 - t_n Q^0)$, из которой следует, что производные $\tilde{r}_{hx}^n$, $\tilde{s}_{hx}^n$ являются ограниченными лишь до конечного момента времени $t_n < t_0$, $t_0 = 1/Q^0$. В этом случае имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 5. Пусть выполнены условия (4), (15). Тогда разностная схема (9)–(11) будет устойчива по начальным данным и для ее решения справедлива оценка вида (18) при $T < t_0$, где

$$t_0 = \frac{1}{\|\tilde{v}_{0x}\|_{C^+} + \sqrt{c} \|(\ln \tilde{\rho}_0)_{\bar{x}}\|_{C^+}}.$$

Вычислительный эксперимент. Ниже приводятся численные результаты, подтверждающие полученные теоретические выводы. В качестве тестовой задачи была рассмотрена система дифференциальных уравнений (1) с однородными $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$ граничными условиями (3) и начальными условиями вида

$$v_0(x) = -0,99 \sin(2\pi x), \quad \rho_0(x) = 1, \quad c = 1, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (19)$$

$$v_0(x) = 0, \quad \rho_0(x) = 3,6(x - 0,5)^2 + 0,1, \quad c = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (20)$$

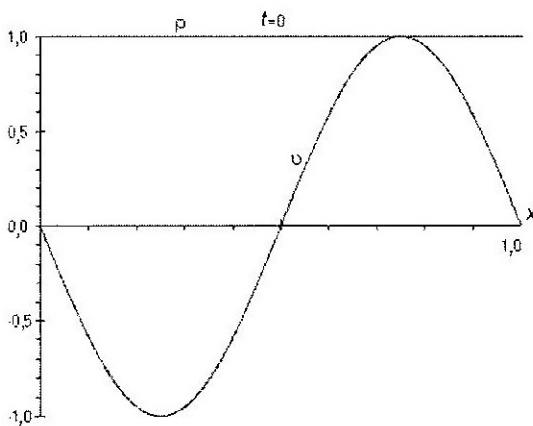


Рис. 1. Профили плотности и скорости (19) в начальный момент времени $t = 0$

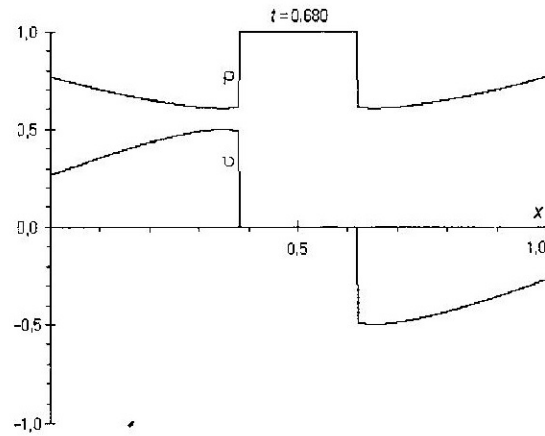


Рис. 2. Решение разностной схемы (9)–(11) с начальными данными (19) на момент времени $t = 0,680$

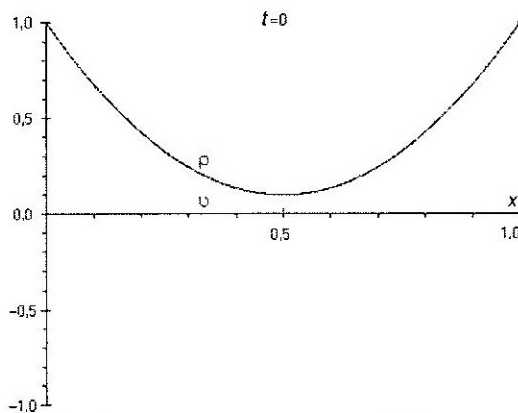


Рис. 3. Профили плотности и скорости (20) в начальный момент времени $t = 0$

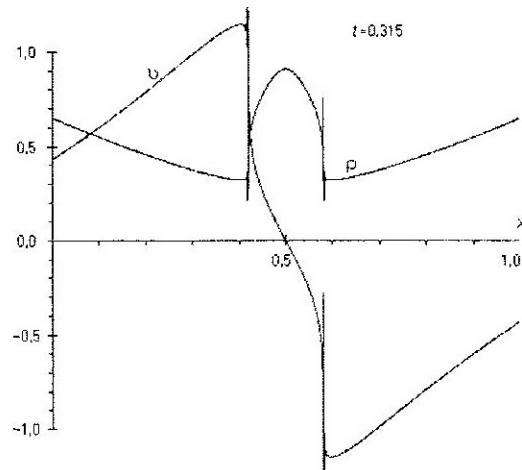


Рис. 4. Неустойчивое решение разностной схемы (9)–(11) с начальными данными (20) на момент времени $t = 0,315$

Заметим, что начальные данные (19) (рис. 1) удовлетворяют полученному в ходе исследования устойчивости условию (4) на начальные данные и не удовлетворяют условию (5) на производные начальных данных. В случае начальных данных (20) (рис. 3) нарушены оба условия устойчивости (4) и (5).

Как видно на рис. 2, при выполнении условия (4) для начальных данных (19) в процессе счета течение остается дозвуковым, однако нарушение условия (5) на производные начальных данных приводит к образованию ударных волн. Нарушение условий (4) на начальные данные (20) приводит к возникновению в процессе счета сверхзвуковых течений и к неустойчивому решению разностной схемы (9)–(11) (рис. 4).

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1989.
2. Matus P. // Comput. Meth. Appl. Math. 2003. Vol. 3, N 2. P. 313–329.
3. Матус П. П., Марцинкевич Г. Л. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 7. С. 955–960.
4. Matus P., Korolyova O., Chuiko M. // Comput. Meth. Appl. Math. 2007. Vol. 7, N 3. P. 208–220.
5. Matus P., Kolodynska A. // Comput. Meth. Appl. Math. 2008. Vol. 8, N 2. P. 150–170.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М., 1968.

CHUIKO M. M.

chuiko@im.bas-net.by

STABILITY AND CONVERGENCE OF DIFFERENCE SCHEMES FOR EQUATIONS OF POLYTROPIC GAS

Summary

A priori estimates of the stability in the sense of the initial data of the difference scheme approximating polytropic gas equations in the Riemann invariants are obtained. The results of computational experiment confirming the theoretical conclusions are given.