

О ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ В ДВИЖУЩИХСЯ ПРОВОДЯЩИХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

The models of the Maxwell equations in monochromatic electrodynamics taking into account the Lorentz transformations and system of planar basic electromagnetic waves propagating in conductive magnetodielectric slowly moving media are described.

В работе [1] получены плоские электромагнитные поля, распространяющиеся в движущихся магнитодиэлектрических непроводящих средах. Плоские поля для проводящих движущихся сред приведены в [2]. В данной статье уравнения Максвелла монохроматической электродинамики и плоские поля в движущихся средах с учетом преобразований Лоренца приведены к специальному виду.

Рассмотрим евклидово пространство R^3 с фиксированной системой координат $Oxyz$. Пространство заполнено однородной проводящей магнитодиэлектрической средой, характеризуемой диэлектрической и магнитной проницаемостями ε , μ и удельной электрической проводимостью γ . В случае, когда среда неподвижна относительно системы координат $Oxyz$, монохроматические электромагнитные поля с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ удовлетворяют уравнениям Максвелла [3]

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \left(\varepsilon + i \frac{\gamma}{\omega} \right) \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}. \quad (1)$$

Всевозможные плоские решения уравнений (1) определены в [3, с. 9].

Если среда равномерно и прямолинейно движется со скоростью $\mathbf{V} = V\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_x + v_2\mathbf{e}_y + v_3\mathbf{e}_z$, $0 < V < c$, относительно системы координат $Oxyz$, уравнения (1) с учетом преобразований Лоренца принимают вид [4]

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{D} = \varepsilon a \mathbf{E} + \varepsilon(1-a)(\mathbf{E}, \mathbf{v})\mathbf{v} - b[\mathbf{H}, \mathbf{v}], \quad \mathbf{B} = \mu a \mathbf{H} + \mu(1-a)(\mathbf{H}, \mathbf{v})\mathbf{v} + b[\mathbf{E}, \mathbf{v}],$$

$$\mathbf{J} = f(\mathbf{E}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \sigma\gamma a\mathbf{E} - \sigma a\mu\gamma[\mathbf{H}, \mathbf{V}] + \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{D},$$

$$f = \gamma \left(\frac{1}{\sigma} - \sigma a \right), \quad a = \frac{1 - \varepsilon_0 \mu_0 V^2}{1 - \varepsilon \mu V^2}, \quad b = \frac{(\varepsilon \mu - \varepsilon_0 \mu_0) V}{1 - \varepsilon \mu V^2},$$

$\sigma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = V/c$, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

Построим модель уравнений Максвелла для медленно движущихся сред.

Утверждение 1. Для медленно движущихся проводящих магнитоэлектрических сред, когда $V^2 \ll c^2$, уравнения (2) эквивалентны уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \left(\varepsilon + i \frac{\gamma}{\omega} \right) \mathbf{E}', \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}', \quad (3)$$

где $\mathbf{E}' = \bar{a}\mathbf{E} - \bar{b}(\mathbf{E}, \mathbf{v})\mathbf{v} - \mu\bar{a}[\mathbf{H}, \mathbf{V}]$, $\mathbf{H}' = \bar{a}\mathbf{H} - \bar{b}(\mathbf{H}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \varepsilon\bar{a}[\mathbf{E}, \mathbf{V}]$.

Доказательство. Пренебрегая величинами второго порядка малости $\beta^2 = V^2/c^2 \approx 0$, получим асимптотические формулы $\sigma \approx 1$, $a \approx \bar{a} = \frac{1}{1 - s^2}$, $a - 1 \approx \bar{b} = \frac{s^2}{1 - s^2}$, $b \approx \varepsilon \mu V \bar{a}$, $f \approx -\gamma \bar{b}$, $s^2 = \varepsilon \mu V^2$, $\mathbf{D} \approx \varepsilon \mathbf{E}'$, $\mathbf{B} \approx \mu \mathbf{H}'$, $\mathbf{J} \approx \gamma \mathbf{E}' + \varepsilon \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{E}'$.

После подстановки в (2) получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (\gamma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E}' + \varepsilon \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{E}', \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}'. \quad (4)$$

Плоские решения уравнений (4) имеют структуру

$$\mathbf{E}' = (A\mathbf{e}_x + B\mathbf{e}_y + C\mathbf{e}_z) \exp i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z).$$

Учитывая этот факт, применим div к уравнениям (4), тогда

$$(\gamma - i\omega\varepsilon + i\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{V})) \operatorname{div} \mathbf{E}' = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}' = 0.$$

Следует $\operatorname{div} \mathbf{E}' = 0$. Получим уравнения (3). Заметим, что при выводе уравнений (3) предполагалось, что скорость распространения волн $V_{\text{cp}} = 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$ в магнитоэлектрической среде соизмерима со скоростью среды V . Это позволяет учитывать эффекты Черенкова.

Утверждение 2. Решениями системы уравнений (3) являются плоские электромагнитные поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \left(N_x^{(\mp j)} \mathbf{e}_x + N_y^{(\mp j)} \mathbf{e}_y + N_z^{(\mp j)} \mathbf{e}_z \right) \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y + q^{(\mp)} z), \quad j = 1, 2, \\ \mathbf{H} &= E_0 \left(M_x^{(\mp j)} \mathbf{e}_x + M_y^{(\mp j)} \mathbf{e}_y + M_z^{(\mp j)} \mathbf{e}_z \right) \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y + q^{(\mp)} z), \end{aligned} \quad (5)$$

где α_1, α_2 – произвольные комплексные числа, E_0 – амплитуда поля,

$$\begin{aligned} N_x^{(\mp 1)} &= \alpha_1 a^{(\mp)}, \quad N_y^{(\mp 1)} = \alpha_2 a^{(\mp)}, \quad N_z^{(\mp 1)} = \frac{\lambda}{k^{(\mp)}} + \frac{\xi V k^{(\mp)}}{\lambda l^{(\mp)}}, \\ M_x^{(\mp 1)} &= \alpha_2 b^{(\mp)} + \frac{\varepsilon \lambda V v_y}{k^{(\mp)}}, \quad M_y^{(\mp 1)} = -\alpha_1 b^{(\mp)} - \frac{\varepsilon \lambda V v_x}{k^{(\mp)}}, \quad M_z^{(\mp 1)} = \frac{\varepsilon \xi V \eta^{(\mp)}}{\lambda k^{(\mp)}}, \\ a^{(\mp)} &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta^{(\mp)}}{k^{(\mp)}} - V v_z \frac{k^{(\mp)}}{l^{(\mp)}} \right), \quad b^{(\mp)} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{k^{(\mp)}}{\mu l^{(\mp)}} - \varepsilon V v_z \frac{\eta^{(\mp)}}{k^{(\mp)}} \right), \\ N_x^{(\mp 2)} &= \alpha_2 c^{(\mp)} + iV \frac{\lambda}{l^{(\mp)}} v_y, \quad N_y^{(\mp 2)} = -\alpha_1 c^{(\mp)} - iV \frac{\lambda}{l^{(\mp)}} v_x, \quad N_z^{(\mp 2)} = \frac{i \xi V \eta^{(\mp)}}{\lambda l^{(\mp)}}, \\ M_x^{(\mp 2)} &= \alpha_1 d^{(\mp)}, \quad M_y^{(\mp 2)} = \alpha_2 d^{(\mp)}, \quad M_z^{(\mp 2)} = -i \left(\frac{\lambda}{\mu l^{(\mp)}} + \frac{\varepsilon \xi V}{\lambda} \right), \\ d^{(\mp)} &= \frac{1}{i \lambda} \left(\frac{\eta^{(\mp)}}{\mu l^{(\mp)}} - \varepsilon V v_z \right), \quad c^{(\mp)} = \frac{i}{\lambda} \left(1 - \frac{V \eta^{(\mp)}}{l^{(\mp)}} v_z \right), \\ k^{(\mp)} &= l^{(\mp)} \sqrt{\left(\varepsilon + i \frac{\gamma}{l^{(\mp)}} \right) \mu}, \quad 0 \leq \arg k^{(\mp)} < \pi, \quad p = 1 - s^2 v_z^2, \quad q^{(\mp)} = i \alpha_3^{(\mp)}, \end{aligned}$$

$$\eta^{(\mp)} = -\alpha_3^{(\mp)}, \quad \alpha_3^{(\mp)} = \frac{1}{v_z} \left(\frac{\omega}{V} - \xi - \frac{l^{(\mp)}}{V} \right), \quad l^{(\mp)} = \frac{V}{p} \left(\frac{\omega}{V} - \xi + \frac{i}{2} \mu \gamma V v_z^2 \right) \mp i v_z V D,$$

$$\xi = \alpha_1 v_x + \alpha_2 v_y, \quad \varsigma = \alpha_2 v_x - \alpha_1 v_y, \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \leq \arg \lambda < \pi,$$

$$D = \frac{1}{|p|} D_0, \quad D_0 = \left(p \lambda^2 - s^2 \left(\xi - \frac{\omega}{V} \right)^2 + \frac{1}{4} \mu^2 \gamma^2 V^2 v_z^2 + i \mu \gamma V \left(\xi - \frac{\omega}{V} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg D_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Утверждение доказывается подстановкой полей четырех типов (5) с индексами $(-1), (+1), (-2), (+2)$ в уравнения (3).

1. Ерофеев В.Т., Круглей С.С. // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44. № 9. С. 1133.
2. Ерофеев В.Т., Пулко Ю.В. // ЭМС-2006: Сб. докл. 9-й Рос. науч.-техн. конф. по электромагнитной совместимости техн. средств и электромагнитной безопасности, С.-Петербург, 20–22 сент. 2006 г. СПб., 2006. С. 288.
3. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Математические модели в электродинамике: в 2 ч. Мн., 2008. Ч. 2.
4. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Математические модели в электродинамике: в 2 ч. Мн., 2004. Ч. 1.

Поступила в редакцию 26.03.10.

Виктор Тихонович Ерофеев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики.