

РАШЭННЕ ДЫСКРЭТНАГА РАЎНАННЯ ЛАПЛАСА Ў КОЛЬЦЫ ПАСЛЯДОЎНАСЦЕЙ

Certain classes of the difference equations with variable coefficient are solved by the operational method in the sequence space.

Разгледзім мноства K паслядоўнасцей над полем $\mathbb{C}$: $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_0, a_1, \dots\} \in K$,

$$b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{b_0, b_1, \dots\} \in K.$$

На K увядзём аперацыі: складанне, множанне на скаляр і множанне ў выглядзе згорткі:

$$a + b = \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \alpha \cdot a = \{\alpha \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad a * b = \left\{ \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

У K ёсць нуль $0 = \{0, 0, 0, \dots\}$ адносна складання і адзінка $I = \{1, 0, 0, \dots\}$ адносна множання. K з'яўляецца камутатыўным кольцам адносна ўведзеных аперацый. Няхай $h = \{0, 1, 0, 0, \dots\} \in K$. Тады для кожнага $a \in K$ маем $h * a = a * h = \left\{ \sum_{k=0}^n h_{n-k} a_k \right\}_{n=0}^{\infty} = \{0, a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Такім чынам, h адпавядае зруху

ўправа. Увядзём n -ю ступень аператара h : $h^n = \underbrace{h * h * \dots * h}_n = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots \right\}$. Элементы кольца K

можна запісаць у выглядзе $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$. Адпаведнасць $\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ задае ізамарфізм кольца K і кольца фармальных ступеневых шэрагаў з множаннем у сэнсе Кашы.

У K няма адваротнага элемента да h . Для яго пабудовы пашырым кольца K . Разгледзім мноства K' паслядоўнасцей з канечнай колькасцю ненулявых элементаў на месцах з адмоўнымі нумарамі: $a = \{\dots, 0, \dots, 0, a_{-m}, a_{-m+1}, \dots, a_0, a_1, \dots\} \in K'$ (падкрэслены элемент стаіць на нулявым месцы). Элементы K' назавём гіперпаслядоўнасцямі (гл. [1]). Згортку дзвюх гіперпаслядоўнасцей вызначым наступным чынам:

$$a * b = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} b_k \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}. \quad (1)$$

Заўважым, што для кожных канкрэтных a, b сума змяшчае канечную колькасць ненулявых складнікаў. Адносна звычайнага складання і множання ў выглядзе згорткі (1) K' – камутатыўнае кольца. Надалей, калі гіперпаслядоўнасці будуць разглядацца як элементы кольца, замест згорткі будзем выкарыстоўваць звычайнае абазначэнне для множання. Кожную паслядоўнасць з K можна разглядаць як гіперпаслядоўнасць з K' , калі запоўніць нулямі месцы з адмоўнымі нумарамі: $a = \{\dots, 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots\} \in K', K \subset K'$. Увядзём на K дроб з дапамогай дачынення эквівалентнасці:

$\frac{a}{k} \sim \frac{a'}{k'} \Leftrightarrow k'a = a'k$. На мностве дробаў увядзём алгебраічныя аперацыі наступным чынам:

$$\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2} = \frac{a_1 k_2 + a_2 k_1}{k_1 k_2}, \quad \frac{a_1}{k_1} \frac{a_2}{k_2} = \frac{a_1 a_2}{k_1 k_2}, \quad \alpha \frac{a}{k} = \frac{\alpha \cdot a}{k}. \quad \text{Кольца дробаў } K_h = \left\{ \frac{a}{h^n} : a \in K, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ можна}$$

атасямліваць з K' . Пазначым $s = \{\dots, 0, 1, 0, 0, \dots\} \in K'$. Гіперпаслядоўнасць s адпавядае зруху ўлева.

Элементы s і h з'яўляюцца ўзаемна адваротнымі ў K' : $sh = hs = I, s = \frac{I}{h} \in K'$. Увядзём аператар

множання на скаляр $[\alpha] = \frac{\{0, \alpha, 0, \dots\}}{h}$. Кольца K не мае дзельнікаў нуля, таму яго можна пашырыць да

$$\text{поля адносін } K/K = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in K \right\}.$$

У полі K/K можна ўвесці аперацыю алгебраічнага дыферэнцавання наступным чынам: алгебраічнай вытворнай назавём адлюстраванне $D: K/K \rightarrow K/K$ такое, што:

$$\begin{cases} Da = \{na_n\}_{n=0}^{\infty} * s, a \in K, \\ D \frac{a}{b} = \frac{(Da)b - a(Db)}{b^2}, \frac{a}{b} \in K/K. \end{cases}$$

Маюць месца роўнасці:

1. $D(\alpha a + \beta b) = \alpha Da + \beta Db$;
2. $D(ab) = (Da)b + a(Db)$;
3. $D\left([\alpha] \frac{a}{b} + [\beta] \frac{c}{d}\right) = [\alpha] D \frac{a}{b} + [\beta] D \frac{c}{d}$;

$$4. D\left(\frac{a}{b} \frac{c}{d}\right) = \left(D\frac{a}{b}\right) \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \left(D\frac{c}{d}\right);$$

$$5. \forall \gamma, \alpha \in \mathbb{C} \quad Dh^\gamma = \gamma h^{\gamma-1}, \quad D(I - \alpha h)^\gamma = -\alpha \gamma (I - \alpha h)^{\gamma-1}.$$

Алгебраічным інтэгралам назавём адлюстраванне $\text{Int}: K \rightarrow K$, $\text{Int } a = \left\{ \frac{a_n}{n+1} \right\}_{n=0}^\infty * h + CI$, дзе C – адвольная сталая. Відавочна, алгебраічны інтэграл з’яўляецца лінейным і $D(\text{Int } a) = a$ для кожнай $a \in K$.

У кольцы K увядзём экспаненту

$$e^a = I + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^k}{k!} + \dots, \quad e^a = \{e_n^a\}_{n=0}^\infty,$$

$$\text{дзе} \quad e_n^a = \begin{cases} e^{a_0}, & n=0 \\ a_n + \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j!} \sum_{\sum_{i=1}^j k_i = n} \prod_{i=1}^j a_{k_i}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Экспанента зададзена для ўсіх $a \in K$, акрамя тых, якія адпавядаюць ступеневым шэрагам з нулявым радыусам збежнасці. Маюць месца наступныя ўласцівасці:

$$1. \forall c \in \mathbb{C} \quad e^{cI} = e^c I;$$

$$2. e^{a+b} = e^a e^b, \quad a, b \in K;$$

$$3. De^a = e^a Da.$$

Выкарыстаем уведзеныя канструкцыі для рашэння дыскрэтнага аналага дыферэнцыяльнага раўнання Лапласа [2]

$$\alpha_2 n a_{n+2} + (\alpha_1 n + \beta_1) a_{n+1} + (\alpha_0 n + \beta_0) a_n = 0, \quad a_0 = a_1 = 0, \quad (2)$$

дзе $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_2 \neq 0$. Рашэнне рознаскага раўнання (2) будзем шукаць у кольцы K . З дапамогай формул

$$a_{n+p} = s^p a - s^p [a_0] - s^{p-1} [a_1] - \dots - s [a_{p-1}], \quad p = \overline{1, k}, \quad (3)$$

раўнанне (2) зводзіцца да раўнання ў гіперпаслядоўнасцях

$$\frac{Da}{a} = \frac{-\beta_0 h^2 + (\alpha_1 - \beta_1)h + 2\alpha_2 I}{h(\alpha_0 h^2 + \alpha_1 h + \alpha_2 I)}, \quad (4)$$

даследаванне якога істотна залежыць ад каэфіцыентаў алгебраічнага раўнання

$$\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0. \quad (5)$$

Пры гэтым рэалізуюцца наступныя выпадкі.

1. Раўнанне (5) мае розныя ненулявыя карані $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тады рашэннем раўнання (4) (а значыць, і (2)) будзе паслядоўнасць

$$a = C \left(I - \frac{1}{z_1} h \right)^{\gamma_1} \left(I - \frac{1}{z_2} h \right)^{\gamma_2} h^{\gamma_3}, \quad (6)$$

дзе лікі $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ вызначаюцца з тоеснасці $\frac{-\beta_0 h^2 + (\alpha_1 - \beta_1)h + 2\alpha_2 I}{h(\alpha_0 h^2 + \alpha_1 h + \alpha_2 I)} = \frac{\gamma_1}{h - z_1 I} + \frac{\gamma_2}{h - z_2 I} + \frac{\gamma_3}{h}$,

$$\gamma_1 = \frac{2z_1 \alpha_0 + \alpha_1 + z_1 \beta_0 + \beta_1}{\alpha_0 (z_2 - z_1)}, \quad \gamma_2 = \frac{2z_2 \alpha_0 + \alpha_1 + z_2 \beta_0 + \beta_1}{\alpha_0 (z_1 - z_2)}, \quad \gamma_3 = 2, \quad (I - \alpha h)^\lambda = \sum_{k=0}^\infty \binom{\lambda}{k} (-\alpha)^k h^k =$$

$$= \left\{ \binom{\lambda}{n} (-\alpha)^n \right\}_{n=0}^\infty, \quad \binom{\gamma}{k} = \frac{\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-k+1)}{k!}. \quad \text{Тут і надалей літара } C \text{ абазначае адвольную сталую.}$$

Формулу (6) можна перапісаць наступным чынам: $a = C \left\{ \binom{\gamma_1}{n} \left(-\frac{1}{z_1} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty} * \left\{ \binom{\gamma_2}{n} \left(-\frac{1}{z_2} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty} * h^{\gamma_3}$.

$$\text{Канчаткова атрымаем } a = Ch^2 * \left\{ (-1)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2z_1\alpha_0 + \alpha_1 + z_1\beta_0 + \beta_1}{\alpha_0(z_2 - z_1)} \right) \binom{n}{n-k} \left(\frac{2z_2\alpha_0 + \alpha_1 + z_2\beta_0 + \beta_1}{\alpha_0(z_1 - z_2)} \right) \binom{n}{k} \frac{1}{z_1^{n-k} z_2^k} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

2. Выпадак $\alpha_0 = 0, \alpha_1 \neq 0$. Тады $\frac{Da}{a} = -\frac{\beta_0}{\alpha_1}I + \frac{2}{h} + \frac{\gamma}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}I + h}$. Рашэнне раўнання (4) мае выгляд

$$a = Ch^2 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}I + h \right)^{\gamma} e^{\text{Int}\left(-\frac{\beta_0}{\alpha_1}I\right)}, \quad \text{дзе} \quad \gamma = -1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_0\alpha_2}{\alpha_1^2}.$$

Пасля пераўтварэнняў атрымаем

$$a = Ch^2 * \left\{ \sum_{k=0}^n \left(-1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_0\alpha_2}{\alpha_1^2} \right) \frac{\alpha_1^{n-2k} (-\beta_0)^k}{\alpha_2^{n-k} k!} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

3. У выпадку $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ атрымаем $a = Ch^2 e^{-\frac{\beta_0}{\alpha_2}h^2 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}h}$.

4. Калі алгебраічнае раўнанне $\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0, \alpha_0 \neq 0$, мае аднолькавыя ненулявыя карані

$$z_1 = z_2 = \xi, \quad \text{тады} \quad \frac{Da}{a} = \frac{-\beta_0 h^2 + (\alpha_1 - \beta_1)h + 2\alpha_2 I}{\alpha_0 h(h - \xi I)^2} = \frac{\gamma_1}{h} + \frac{\gamma_2}{h - \xi I} + \frac{\gamma_3}{(h - \xi I)^2}, \quad \text{дзе} \quad \gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = -2 - \frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

$$\gamma_3 = \frac{-\xi\beta_0 - \beta_1}{\alpha_0}. \quad \text{Пры гэтым рашэннем (4) будзе} \quad a = Ch^2 (h - \xi I)^{-2 - \frac{\beta_0}{\alpha_0}} e^{\frac{\xi\beta_0 + \beta_1}{\alpha_0 \xi^3} (I - \xi h)^{-3}}.$$

Гэтую формулу можна

$$\text{перапісаць наступным чынам: } a = Ch^2 * \left\{ \binom{-2 - \frac{\beta_0}{\alpha_0}}{n} \left(-\frac{1}{\xi} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty} * e^{\frac{\xi\beta_0 + \beta_1}{\alpha_0 \xi^3} \left\{ \binom{-3}{n} (-\xi)^n \right\}_{n=0}^{\infty}}.$$

У прыватных выпадках раўнанне (2) дае аналогі вядомых дыферэнцыяльных раўнанняў, напрыклад, дыскрэтна аналаг звыроднага гіпергеаметрычнага раўнання: $na_{n+2} + (c - n)a_{n+1} - \alpha a_n = 0$.

$$\text{Яго рашэнне мае выгляд } a = Ch^2 * \left\{ (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{c - \alpha - 1}{n - k} \frac{\alpha^k}{k!} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Для дыскрэтнага аналага раўнання Лагера $na_{n+2} - (n + \alpha - 1)a_{n+1} + (\alpha + \lambda)a_n = 0$ рашэннем будзе

$$a = Ch^2 * \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{\lambda}{n - k} \frac{(\alpha + \lambda)^k}{k!} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Разгледзім дыскрэтна аналаг раўнання Беселя $na_{n+2} - \alpha a_{n+1} + na_n = 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Тады

$$\frac{Da}{a} = \frac{2\alpha h + 2I}{h(h^2 + 1)} = (2\alpha I + 2s) \sum_{k=0}^{\infty} (-h^2)^k, \quad \frac{Da}{a} = 2s + 2\mu, \quad \text{дзе} \quad \mu = \{\alpha, -1, -\alpha, 1, \alpha, -1, -\alpha, 1, \dots\} - \text{перыядычная}$$

паслядоўнасць. Рашэнне (2) атрымаем у выглядзе $a = Ch^2 e^{2 \text{Int} \mu}$.

Пяройдзем да рашэння адпаведнага (2) неаднароднага рознаснага раўнання

$$\alpha_2 na_{n+2} + (\alpha_1 n + \beta_1) a_{n+1} + (\alpha_0 n + \beta_0) a_n = d_n, \quad a_0 = a_1 = 0, \quad (7)$$

дзе $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}, \alpha_2 \neq 0, d_0 = d_1 = 0$. Няхай $\tilde{a}$ – нейкае прыватнае ненулявое рашэнне (2). Тады

$$h(\alpha_0 h^2 + \alpha_1 h + \alpha_2 I) D\tilde{a} = (-\beta_0 h^2 + (\alpha_1 - \beta_1)h + 2\alpha_2 I) \tilde{a}.$$

Будзем шукаць рашэнне раўнання (7) метадам варыяцыі адвольнай сталай. Няхай яно мае выгляд

$$a = c * \tilde{a}, \quad \text{дзе} \quad c \text{ пакуль не вядомая паслядоўнасць, тады з } (\alpha_2 s + \alpha_1 I + \alpha_0 h) Da + (-2\alpha_2 s^2 - (\alpha_1 - \beta_1)s + \beta_0) a = d \text{ атрымаем}$$

$$(\alpha_2 s + \alpha_1 I + \alpha_0 h) c D \tilde{a} + (-2\alpha_2 s^2 - (\alpha_1 - \beta_1) s + \beta_0) c \tilde{a} + (\alpha_2 s + \alpha_1 I + \alpha_0 h) \tilde{a} D c = d,$$

адкуль вынікае $(\alpha_2 s + \alpha_1 I + \alpha_0 h) \tilde{a} D c = d$, што эквівалентна

$$Dc = \frac{h * d}{\tilde{a} * (\alpha_0 h^2 + \alpha_1 h + \alpha_2 I)}.$$

У залежнасці ад рашэння алгебраічнага раўнання (5) разгледзім выпадкі.

1. У выпадку, калі алгебраічнае раўнанне (5) мае розныя ненулявыя карані $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, прыватнае рашэнне (1) мае выгляд $\tilde{a} = h^2 \left(I - \frac{1}{z_1} h \right)^{\gamma_1} \left(I - \frac{1}{z_2} h \right)^{\gamma_2}$. Улічваючы судачыненні паміж каранямі і каэфіцыентамі (5), атрымаем

$$Dc_n = \mu s, \quad (8)$$

дзе $\mu = \frac{1}{\alpha_2} d \left(I - \frac{1}{z_1} h \right)^{-1-\gamma_1} \left(I - \frac{1}{z_2} h \right)^{-1-\gamma_2}$. Гэту формулу можна перапісаць у выглядзе

$$\mu = \frac{1}{\alpha_2} d * \left\{ (-1)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{(z_1 + z_2) \alpha_0 + \alpha_1 + z_1 \beta_0 + \beta_1}{\alpha_0 (z_1 - z_2)} \right) \binom{n}{n-k} \left(\frac{(z_1 + z_2) \alpha_0 + \alpha_1 + z_2 \beta_0 + \beta_1}{\alpha_0 (z_2 - z_1)} \right) \binom{n}{k} \frac{1}{z_1^{n-k} z_2^k} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

З (8) атрымаем $\left\{ \frac{c_n}{n+1} \right\}_{n=0}^{\infty} = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, тады рашэннем раўнання (7) будзе $a = \{(n+1)\mu_n\}_{n=0}^{\infty} * \tilde{a}$.

2. Калі $\alpha_0 = 0, \alpha_1 \neq 0$. Прыватнае рашэнне раўнання (2) мае выгляд $\tilde{a} = h^2 \left(I + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} h \right)^{\gamma} e^{\frac{\beta_0}{\alpha_1} h}$. Яго

можна перапісаць наступным чынам: $\tilde{a} = h^2 * \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{\gamma}{n-k} \frac{\alpha_1^{n-2k} (-\beta_0)^k}{\alpha_2^{n-k} k!} \right\}_{n=0}^{\infty}$. Тады

$$Dc = \frac{hd}{\tilde{a}(\alpha_1 h + \alpha_2 I)} = \mu s, \quad \text{дзе} \quad \mu = \frac{1}{\alpha_2} d \left(I + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} h \right)^{-1-\gamma} e^{\frac{\beta_0}{\alpha_1} h} = \frac{1}{\alpha_2} d * \left\{ \sum_{k=0}^n \left(\frac{\beta_1 \alpha_1 - \beta_0 \alpha_2}{\alpha_1^2} \right) \binom{n}{n-k} \frac{\alpha_1^{n-2k} \beta_0^k}{\alpha_2^{n-k} k!} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Рашэннем раўнання (7) будзе $a = \{(n+1)\mu_n\}_{n=0}^{\infty} * \tilde{a}$.

3. У выпадку $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ атрымаем $\tilde{a} = h^2 e^{\frac{\beta_0}{\alpha_2} h^2 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} h}$. Тады $Dc = \frac{hd}{\alpha_2 h^2 e^{\frac{\beta_0}{\alpha_2} h^2 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} h}} = \mu s$, дзе

$\mu = \frac{1}{\alpha_2} d e^{\frac{\beta_0}{\alpha_2} h^2 + \frac{\beta_1}{\alpha_2} h}$, рашэннем раўнання (7) будзе $a = \{(n+1)\mu_n\}_{n=0}^{\infty} * \tilde{a}$.

4. Калі алгебраічнае раўнанне (5) мае аднолькавыя ненулявыя карані $z_1 = z_2 = \xi$, прыватнае

рашэнне (2) мае выгляд $\tilde{a} = h^2 * \left\{ \binom{-2 - \frac{\beta_0}{\alpha_0}}{n} \left(-\frac{1}{\xi} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty} * e^{\frac{\xi \beta_0 + \beta_1}{\alpha_0 \xi^3} \left(\binom{-3}{n} (-\xi)^n \right)_{n=0}^{\infty}}$.

$$Dc = \frac{hd}{\alpha_0 h^2 (h - \xi I)^{-\frac{\beta_0}{\alpha_0}} e^{\frac{\xi \beta_0 + \beta_1}{\alpha_0 \xi^3} (I - \xi h)^{-3}}} = \mu s, \quad \text{дзе} \quad \mu = \frac{1}{\alpha_0} (-\xi)^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}} d * \left\{ \binom{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}{n} \left(-\frac{1}{\xi} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty} * e^{\frac{\xi \beta_0 + \beta_1}{\alpha_0 \xi^3} \left(\binom{-3}{n} (-\xi)^n \right)_{n=0}^{\infty}},$$

рашэннем раўнання (7) будзе $a = \{(n+1)\mu_n\}_{n=0}^{\infty} * \tilde{a}$.

Разгледзім дастасаванне дадзенага метаду да рашэння неаднароднага дыскрэтнага аналага звыводнага гіпергеаметрычнага раўнання

$$na_{n+2} + (c - n)a_{n+1} - \alpha a_n = d_n, \quad (9)$$

дзе $d_0 = d_1 = 0$. Прыватным рашэннем адпаведнага аднароднага раўнання з'яўляецца

$$\tilde{a} = h^2 * \left\{ (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{c - \alpha - 1}{n - k} \frac{\alpha^k}{k!} \right\}_{n=0}^{\infty}. \quad \text{Улічваючы каэфіцыенты раўнання, атрымаем}$$

$$\mu = d * \left\{ (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{-c + \alpha}{n - k} \frac{(-\alpha)^k}{k!} \right\}_{n=0}^{\infty}. \quad \text{Рашэнне (9) атрымаем у выглядзе}$$

$$a = \{(n+1)\mu_n\}_{n=0}^{\infty} * h^2 * \left\{ (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{c - \alpha - 1}{n - k} \frac{\alpha^k}{k!} \right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \text{дзе } \mu_n = \sum_{j=0}^n d_{n-j} \sum_{k=0}^j \binom{\alpha - c}{j - k} \frac{(-1)^{j+k} \alpha^k}{k!}.$$

1. Васильев И.Л., Новичкова Д.А. // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. Междунар. конф. Мн., 2009. С. 40.

2. Иосида К. Операционное исчисление: Теория гиперфункций / Пер. с англ. В.И. Машанова, Я.В. Радыно; Под ред. Я.В. Радыно. Мн., 1989.

Паступіў у рэдакцыю 28.06.10.

Ігар Леанідавіч Васільеў – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэорыі функцый.

Дар'я Аляксандраўна Навічкова – студэнтка 5-га курса механіка-матэматычнага факультэта.