УДК 517.937:517.956.4

К.В. ВАСИЛЕВСКИЙ

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУЧЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

It is proved existence and unique theorems for weak solutions of the bounded problem for abstract differential equations of the third order with variable domains of smooth unbounded operators.

Дифференциально-операторные уравнения (ДОУ) первого порядка с переменными областями определения неограниченных операторов изучались в [1–4]. В работе [1] была установлена корректность в слабом смысле задачи Коши для ДОУ первого порядка с переменными областями определения в случае гладких самосопряженных операторов. Корректность в сильном смысле задачи Коши для ДОУ первого порядка с кусочно-сглаживающимися операторами доказана в [2]. В [3, 4] результаты [1] обобщены на случай гладких максимально аккретивных операторов с переменными областями определения. Смешанные задачи для параболических и дифференциальных уравнений третьего порядка в частных производных с постоянными областями определения исследовались В.И. Корзюком в [5–7]. В данной работе изучается корректность в слабом смысле граничной задачи для двучленного ДОУ третьего порядка с переменными областями определения гладких максимально аккретивных операторов.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$ изучается корректность в слабом смысле граничной задачи

$$-u^{(3)}(t)+\lambda A(t)u(t)=f(t),\ t\in]0,T[,\ \lambda>0, \tag{1}$$

$$u(0)=u'(0)=u(T)=0, \tag{2}$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H и $A(t)$ – линейные неограниченные замкнутые операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$. Здесь и в дальнейшем производные функции w обозначаются через $w'=dw/dt$, $w^{(i)}=d^iw/dt^i$, $i=2,3$. Предполагается, что операторы $A(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. При каждом $t\in[0,T]$ выполняются неравенства

$$[u]^2_{(t)}\equiv \operatorname{Re}(A(t)u,u)\ge c_1|u|^2\ \ \forall u\in D(A(t)),$$

$$\langle v\rangle^2_{(t)}\equiv \operatorname{Re}(A^*(t)v,v)\ge c_1|v|^2\ \ \forall v\in D(A^*(t)),\ c_1>0,$$

где $A^*(t)$ – сопряженные операторы в H к операторам $A(t)$ и $D(A^*(t))$ – их области определения.

II. Обратные $A^{-1}(t)\in B\big([0,T],\mathcal{L}(H)\big)$ операторов $A(t)$ сильно непрерывны по t в H и при почти всех $t\in]0,T[$ имеют в H слабые производные $d^iA^{-1}(t)/dt^i\in L_\infty\big(]0,T[,\mathcal{L}(H)\big)$, $i=\overline{1,3}$, такие, что справедливы неравенства

$$\left|\left(\frac{d^iA^{-1}(t)}{dt^i}g,h\right)\right|\le \tilde c_i[g]_{(-2-i,t)}\,[h]_{(-3+i,t)}\ \forall g,h\in H,\ i=0,1,\tilde c_0>0,\tilde c_1\ge 0, \tag{3}$$

$$\left|\left(\frac{d^iA^{-1}(t)}{dt^i}g,h\right)\right|\le \tilde c_i[g]_{(-3,t)}\,|h|\ \ \forall g,h\in H,\ \tilde c_i\ge 0, i=2,3, \tag{4}$$

где эрмитовы нормы $[v]_{(-\alpha,t)}=\sqrt{\operatorname{Re}(A^{-\alpha/3}(t)v,v)}, 0\le\alpha\le 3.$

Определение 1. Функция $u\in\mathcal{H}=L_2\big(]0,T[,H\big)$ называется **слабым решением** граничной задачи (1), (2) для правой части $f\in\mathcal{H}^{*-}=L_2\big(]0,T[,H_t^{*-}\big)$, если для нее имеет место равенство

$$\int_0^T\Big\{\big(u,\phi^{(3)}\big)+\lambda\big(u,A^*(t)\phi\big)\Big\}dt=\int_0^T\langle f,\phi\rangle_{(t)}dt$$

для всех $\phi\in\Phi=\big\{\phi\in\mathcal{H}:\phi(t)\in D(A^*(t)),\ t\in[0,T];$ слабые производные $\phi^{(i)},\ A^*(t)\phi\in\mathcal{H}$, $i=\overline{1,3};\ \phi(0)=\phi(T)=\phi'(T)=0\big\}$, где H_t^{*-} – антидвойственные пространства к гильбертовым пространствам H_t^{*+} – замыканиям $D(A^*(t))$ по нормам $\langle\cdot\rangle_{(t)}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(t)}$ – полуторалинейная форма антидвойственности между гильбертовыми пространствами H_t^{*+} и H_t^{*-}.

Исследуем корректность в слабом смысле граничной задачи (1), (2).

2. Существование слабых решений граничной задачи. Справедлива следующая теорема существования слабых решений граничной задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие I. Тогда для каждых* $f\in\mathcal{H}^{*-}$ *и любого* $\lambda>0$ *существует слабое решение* $u\in\mathcal{H}$ *граничной задачи (1), (2).*

Доказательство. Будем применять проекционную теорему Лионса из [1]. В этой теореме для гильбертова пространства $F=\mathcal{H}$ с нормой $\|u\|_F=\|u\|_0$ и предгильбертова пространства $\tilde\Phi$ – множества Φ из определения 1, наделенного эрмитовой нормой $|||\phi|||=\left(\int_0^T\langle\phi\rangle^2_{(t)}dt\right)^{1/2}$, возьмем полуторалинейную форму

$$E(u,\phi)=\int_0^T\left\{\left(u,\phi^{(3)}\right)+\lambda\left(u,\ A^*(t)\phi\right)\right\}dt.$$

Пространство Φ непрерывно вложено в пространство F: $\|\phi\|_F\leq c_2\,|||\,\phi\,|||\ \ \forall\phi\in\Phi,\ c_2=c_1^{-1/2}$. При каждом $\phi\in\Phi$ форма $E(u,\phi)$ непрерывна по u на $\mathcal{H}$. Берем $\operatorname{Re}E(\phi,\phi)$, интегрируем по частям один раз по t и получаем, что

$$\operatorname{Re}E(\phi,\phi)=\lambda\int_0^T\left\langle\phi\right\rangle_{(t)}^2dt+\frac{1}{2}\left|\phi(0)\right|^2\geq\lambda\int_0^T\left\langle\phi\right\rangle_{(t)}^2dt=\lambda\,|||\,\phi\,|||^2\ \ \forall\phi\in\Phi,$$

т. е. неравенство $|E(\phi,\phi)|\geq c_3\,|||\,\phi\,|||^2\ \ \forall\phi\in\Phi$ выполняется при $c_3=\lambda$.
Возьмем на Φ антилинейный функционал

$$L(\phi)=\int_0^T\left\langle f,\ \phi\right\rangle_{(t)}dt.$$

При каждом $f\in\mathcal{H}^{*-}$ он очевидно непрерывен по ϕ на Φ. Поскольку все предположения теоремы Лионса [1] верны, то она позволяет утверждать, что $\forall\lambda>0$ граничная задача (1), (2) имеет слабое решение $u\in\mathcal{H}$.

3. Единственность слабых решений граничной задачи. Справедлива следующая теорема единственности слабых решений граничной задачи (1), (2).

Теорема 2. *Если выполняются условия I, II, интерполяционное неравенство*

$$\int_0^T[w^{(2)}]_{(-2,t)}^2dt\leq\varepsilon\int_0^T[w^{(3)}]_{(-3,t)}^2dt+\tilde c_4(\varepsilon)\int_0^T|w'|^2\,dt,\quad\forall\varepsilon>0,\tag{5}$$

для всех $w\in C^{(3)}([0,T],H),\ w(0)=w(T)=0,$ и $[v]_{(-3,\,t)}\leq a_1[v]_{(-2,\,t)}\forall v\in H,\ a_1>0,$ *то для каждых* $f\in\mathcal{H}^{*-}$ *слабое решение* $u\in\mathcal{H}$ *граничной задачи* (1), (2) *единственно при любом* $\lambda\geq\lambda_1$,

$$\lambda_1=24\tilde c_3^{\,2}+54\tilde c_2^{\,2}+54\tilde c_1^{\,2}e^T\tilde c_4(\varepsilon_1)+4a_1^{\,2}\tilde c_3^{\,2}+9a_1^{\,2}\tilde c_2^{\,2}+2\left(e^T+3a_1\tilde c_1e^T\right)\tilde c_4(\varepsilon_2)+$$
$$+2\tilde c_0^{\,2}e^{2T}\tilde c_4(\varepsilon_2)+\delta,\ \varepsilon_1=\left(108\tilde c_1^{\,2}e^T\right)^{-1},\ \varepsilon_2=\left(4e^T+12a_1\tilde c_1e^T+4\tilde c_0^{\,2}e^{2T}\right)^{-1},\ \delta>0.$$

Доказательство. Пусть $u\in\mathcal{H}$ – слабое решение граничной задачи (1), (2) при $f=0$. Тогда согласно определению 1 справедливо тождество

$$\int_0^T\left\{\lambda\left(u,\ A^*(t)\phi\right)+\left(u,\ \phi^{(3)}\right)\right\}dt=0\ \forall\phi\in\Phi.\tag{6}$$

В тождестве (6) положим $\phi=A^{*-1}(t)v$, где v – решение граничной задачи: $\left(e^t\,v^{(2)}\right)'=u,\ 0<t<T,\ v(0)=v(T)=v'(T)=0.$ Отсюда имеем $u=e^tv^{(2)}+e^tv^{(3)}$. Подставим выражения для u и ϕ в тождество (6), возьмем вещественную часть и получим сумму равенств:

$$\begin{aligned}\lambda\operatorname{Re}\int_0^T\left(u,\ A^*(t)\phi\right)dt&=\lambda\operatorname{Re}\int_0^T\left(e^tv^{(2)}+e^tv^{(3)},v\right)dt=\lambda\operatorname{Re}\int_0^Te^t\left(v^{(2)},\ v\right)dt-\\-\lambda\operatorname{Re}\int_0^Te^t\left(v^{(2)},v'\right)dt-\lambda\operatorname{Re}\int_0^Te^t\left(v^{(2)},v\right)dt&=\frac{\lambda}{2}\left|v'(0)\right|^2+\frac{\lambda}{2}\int_0^Te^t\,|v'|^2\,dt,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_0^T\left(u,\phi^{(3)}\right)dt&=\operatorname{Re}\int_0^T\left(e^tv^{(2)}+e^tv^{(3)},\left(A^{*-1}(t)v\right)^{(3)}\right)dt=\\&=\int_0^Te^t[\,v^{(3)}\,]_{(-3,t)}^2dt+\operatorname{Re}J_1(v)+\operatorname{Re}J_2(v),\end{aligned}\tag{8}$$

где формы

$$J_1(v)=\int_0^Te^t\left(v^{(3)},\frac{d^3A^{*-1}(t)}{dt^3}v+3\frac{d^2A^{*-1}(t)}{dt^2}v+3\frac{dA^{*-1}(t)}{dt}v^{(2)}\right)dt,$$

$$J_2(v)=\int_0^T e^t\left(v^{(2)},\frac{d^3A^{*-1}(t)}{dt^3}v+3\frac{d^2A^{*-1}(t)}{dt^2}v'+3\frac{dA^{*-1}(t)}{dt}v^{(2)}+A^{*-1}(t)v^{(3)}\right)dt.$$

Оценим правые части равенств (7), (8) снизу следующим образом.

Если $\tilde c_1=0,$ то $\tilde c_2=\tilde c_3=0$ и форма $J_1(v)=0.$ Если $\tilde c_1>0,$ то согласно неравенствам (3), (4) вещественная часть формы $J_1(v)$ оценивается сверху величиной

$$\int_0^T e^t\left([v^{(3)}]_{(-3,t)}\tilde c_3\,|v|+[v^{(3)}]_{(-3,t)}3\tilde c_2\,|v'|+[v^{(3)}]_{(-3,t)}3\tilde c_1[v^{(2)}]_{(-2,t)}\right)dt,$$

которая в силу неравенства Коши – Буняковского не превосходит

$$\left(3\int_0^T e^t[v^{(3)}]^2_{(-3,t)}dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T e^t\left(\tilde c_3^{\,2}\,|v|^2+9\,\tilde c_2^{\,2}\,|v'|^2+9\tilde c_1^{\,2}[v^{(2)}]^2_{(-2,t)}\right)dt\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Из очевидного равенства $-2\operatorname{Re}\int_0^T e^t\left(v',v\right)dt=\int_0^T e^t\,|v|^2\,dt$ вытекает оценка

$$\int_0^T e^t\,|v|^2\,dt\le 4\int_0^T e^t\,|v'|^2\,dt. \tag{10}$$

Применяя эту оценку в (9), приходим к выражению

$$\left(\int_0^T e^t[v^{(3)}]^2_{(-3,t)}dt\right)^{1/2}\left(\left(12\tilde c_3^{\,2}+27\tilde c_2^{\,2}\right)\int_0^T e^t\,|v'|^2\,dt+27\tilde c_1^{\,2}e^T\int_0^T[v^{(2)}]^2_{(-2,t)}dt\right)^{1/2}.$$

В последнем интеграле данного выражения используем интерполяционное неравенство (5), ко всему выражению применяем элементарное арифметическое неравенство $ab\le a^2/4+b^2$ и имеем мажоранту

$$\left(\frac14+27\tilde c_1^{\,2}e^T\varepsilon\right)\int_0^T e^t[v^{(3)}]^2_{(-3,t)}dt+\left(12\tilde c_3^{\,2}+27\tilde c_2^{\,2}+27\tilde c_1^{\,2}e^T\tilde c_4(\varepsilon)\int_0^T e^t\,|v'|^2\,dt\right),$$

которая при $\varepsilon=\varepsilon_1=\left(108\,\tilde c_1^{\,2}e^T\right)^{-1}$ равна

$$\frac12\int_0^T e^t[v^{(3)}]^2_{(-3,t)}dt+\left(12\tilde c_3^{\,2}+27\tilde c_2^{\,2}+27\tilde c_1^{\,2}e^T\tilde c_4(\varepsilon_1)\int_0^T e^t\,|v'|^2\,dt\right). \tag{11}$$

Ввиду неравенств (3), (4) вещественная часть формы $J_2(v)$ при всех $\tilde c_i\ge 0,\ i=\overline{1,3},$ оценивается сверху величиной

$$\int_0^T e^t\left([v^{(2)}]_{(-3,t)}\tilde c_3\,|v|+[v^{(2)}]_{(-3,t)}3\tilde c_2\,|v'|\right)dt+$$

$$+\int_0^T e^t\left([v^{(2)}]_{(-3,t)}3\tilde c_1[v^{(2)}]_{(-2,t)}+[v^{(2)}]_{(-2,t)}\tilde c_0[v^{(3)}]_{(-3,t)}\right)dt.$$

Применив к первым двум произведениям неравенство Коши – Буняковского и оценку (10), а к последнему произведению элементарное арифметическое неравенство, получим выражение

$$\left(\int_0^T e^t[v^{(2)}]^2_{(-2,t)}dt\right)^{1/2}\left(\left(8a_1^{\,2}\tilde c_3^{\,2}+18a_1^{\,2}\tilde c_2^{\,2}\right)\int_0^T e^t\,|v'|^2\,dt\right)^{1/2}+$$

$$+3a_1\tilde c_1e^T\int_0^T[v^{(2)}]^2_{(-2,t)}dt+\frac14\int_0^T[v^{(3)}]^2_{(-3,t)}dt+\tilde c_0^{\,2}e^{2T}\int_0^T[v^{(2)}]^2_{(-2,t)}dt.$$

Здесь сначала в первом произведении воспользуемся элементарным арифметическим неравенством, затем приведем подобные члены и применим интерполяционное неравенство (5) и найдем мажоранту

$$\frac14\int_0^T e^t[v^{(3)}]^2_{(-3,t)}dt+\left(2a_1^{\,2}\tilde c_3^{\,2}+\frac92a_1^{\,2}\tilde c_2^{\,2}\right)\int_0^T e^t\,|v'|^2\,dt+$$

$$+\left(e^T+3\,a_1\tilde c_1e^T+\tilde c_0^{\,2}e^{2T}\right)\left(\varepsilon\int_0^T[v^{(3)}]^2_{(-3,t)}dt+\tilde c_4(\varepsilon)\int_0^T|v'|^2\,dt\right),$$

которая при $\varepsilon = \varepsilon_2 = \left(4e^T + 12a_1\tilde{c}_1e^T + 4\tilde{c}_0^{\,2}e^{2T}\right)^{-1}$ меньше величины

$$\frac{1}{2}\int_0^T e^t[v^{(3)}]^2_{(-3,t)}\,dt + \left(2a_1^{\,2}\tilde{c}_3^{\,2} + \frac{9}{2}a_1^{\,2}\tilde{c}_2^{\,2}\right)\int_0^T e^t\,|v'|^2\,dt +$$
$$+\left(e^T + 3a_1\tilde{c}_1e^T + \tilde{c}_0^{\,2}e^{2T}\right)\tilde{c}_4(\varepsilon_2)\int_0^T e^t\,|v'|^2\,dt. \qquad (12)$$

Таким образом, оценивая сумму правых частей равенств (7), (8) снизу при помощи мажорант (11), (12), взятых с обратными знаками, выводим, что при всех $\tilde{c}_i \geq 0,\ i = \overline{1,3},$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{\lambda}{2} - c_5(T)\right)\int_0^T e^t\,|v'|^2\,dt \leq 0, \qquad (13)$$

где постоянная

$$c_5(T) = 12\tilde{c}_3^{\,2} + 27\tilde{c}_2^{\,2} + 27\tilde{c}_1^{\,2}e^T\tilde{c}_4(\varepsilon_1) + 2a_1^{\,2}\tilde{c}_3^{\,2} +$$
$$+\frac{9}{2}a_1^{\,2}\tilde{c}_2^{\,2} + \left(e^T + 3a_1\tilde{c}_1e^T + \tilde{c}_0^{\,2}e^{2T}\right)\tilde{c}_4(\varepsilon_2).$$

Из неравенства (13) следует, что $v' = 0$ при всех $\lambda \geq \lambda_1,\ \lambda_1 = 2c_5(T) + \delta, \delta > 0,$ и, значит, $u = 0.$ Теорема 2 доказана.

Замечание. Согласно замечанию 1.2 работы [1, с. 38] доказанные нами теоремы 1 и 2 о существовании и единственности слабых решений означают существование ограниченного обратного оператора из $\mathcal{H}^{*-}$ в $\mathcal{H}$ к слабому расширению линейного оператора из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}^{*-}$, порожденного граничной задачей (1), (2), т. е. для любого антилинейного функционала $f \in \mathcal{H}^{*-}$ и соответствующего ему слабого решения $u \in \mathcal{H}$ имеет место неравенство

$$\int_0^T \left|u(t)\right|^2 dt \leq \frac{1}{c_1\lambda_1^{\,2}}\int_0^T \left\langle f(t)\right\rangle^2_{(-t)},$$

где $\left\langle\,\cdot\,\right\rangle_{(-t)}$ – нормы в H_t^{*-}.

1. L i o n s J . - L . Equations différentielles opérationelles et problèmes aux limites. Berlin, 1961.
2. Л о м о в ц е в Ф . Е . // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132.
3. Л о м о в ц е в Ф . Е . // Там же. Т. 42. № 5. С. 630.
4. Л о м о в ц е в Ф . Е . // Там же. № 6. С. 820.
5. К о р з ю к В . И . , Ю р ч у к Н . И . // Там же. 1991. Т. 27. № 6. С. 1448.
6. К о р з ю к В . И . , К и с е л е в В . Б . // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2001. № 3. С. 5, 140.
7. К о р з ю к В . И . , Д а й н я к В . В . // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2005. № 3. С. 54.

Поступила в редакцию 23.06.10.

Константин Викторович Василевский – аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики Ф.Е. Ломовцев.