*УДК 539.214*

*В.А. НИФАГИН*

# ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ

Considering modified method of decomposition on power parameter for the decision of boundary value problems for plasticity law with nonlinear hardening in the neighborhood of singular boundary point. The recurrent sequence of boundary value problems about own values and functions of the nonlinear differential operator is solved. The numerical analysis of decisions for fields of pressure in the area adjoining to singular of a point of border is carried out. Influence of plastic properties on balance of the material is investigated.

При решении краевых задач нелинейной механики сплошных сред важное место занимает получение адекватных оценок напряженного состояния в окрестности сингулярных точек границы области. Из-за нелинейности разрешающих уравнений и сингулярности полей напряжений и деформаций в упругопластических задачах о концентраторах напряжений в рамках различных теорий пластичности получили распространение варианты метода возмущений, позволяющие находить решение, близкое к уже известному точному. При этом возмущению можно подвергать как форму тела, так и граничные условия. Так, метод упругих решений [1, 2] использовался для решения задач деформационной теории пластичности и идеальной пластичности, а в теории течения с упрочнением применялся метод разложения по параметру нагружения [3, 4], редуцирующий физически нелинейную краевую задачу в неголономной постановке к рекуррентной последовательности линейных задач с фиктивными массовыми силами. Особенности возникающих решений связаны с выбором параметра разложения. В [1] в качестве параметра рассматривалась величина, обратная модулю объемного сжатия, в [2] параметр характеризует различие между плоским и осесимметричным состоянием, в [3, 4] – безразмерный параметр, учитывающий внешние нагрузки. Обычно в таких задачах вопрос о сходимости приближений решается в общем виде. Доказываются теоремы о существовании нетривиальной области значений параметра, где ряды решений сходятся в том или ином смысле [5–7]. Однако в конкретных краевых задачах даже нахождение нескольких первых членов позволяет получить значительную информацию о напряженно-деформируемом состоянии среды.

В то же время при применении стандартного варианта метода возмущений в окрестности сингулярных точек границы области возникают существенные погрешности решений. Это связано с тем, что при таком подходе базовым является линейное решение (первый член разложения), в то время как в окрестности угловой точки базовой является нелинейная часть диаграммы деформирования (кубический член). Поэтому исследование напряженно-деформированного состояния тела в окрестности особой точки предполагает разработку другого варианта метода, в котором первый член разложения получается на основе кубического слагаемого закона деформирования, а остальные члены выступают в качестве поправок к нему. Варианты такого подхода были использованы для тел с трещинами при различных определяющих соотношениях теорий пластичности [8], применении локальных характеристик совместно с критериями разрушения [9], а также при построении эффективных алгоритмов численного анализа полных решений с помощью сращивания полей напряжений вблизи угловой точки и на удалении от нее.

Рассмотрим возможности применения асимптотического метода разложения по параметру нагружения для двумерной статической задачи о давлении жесткого полубесконечного штампа на упругопластическую полуплоскость силой $P$ при отсутствии трения в зоне контакта и оценки напряженного состояния в окрестности угловой точки. Материал полуплоскости считается упрочняющимся по степенному закону, несжимаемым и плоскодеформируемым. Декартовую систему координат отнесем к угловой точке штампа. Оси $\xi_i \left(i = 1, 2\right)$ располагаем таким образом, что ось $\xi_1$ направлена вдоль границы нижней полуплоскости $D,$ которую занимает среда.

Будем считать, что состояние вблизи угловой точки контролируется параметром нагружения $K,$ который будет рассматривать в качестве коэффициента интенсивности напряжений в упругой области, окружающей зону пластического деформирования. Тогда единственным независимым параметром задачи, имеющим размерность длины, является величина $K^2 / G^2,$ поэтому искомые функции задачи зависят от нагрузки только посредством безразмерных переменных

$$x_i = \xi_i G^2 / K^2 \,(i = 1,2);\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};\ \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},$$

переходя к которым определяющие соотношения теории течения с упрочнением в приращениях имеют вид

$$\delta e_{ij} = \delta s_{ij} + \delta F(T) s_{ij},\ \ i,j = r,\varphi, \tag{1}$$

где компоненты тензоров и девиаторов напряжений и деформаций связаны формулами

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij} = e_{ij};\ e_r + e_\varphi = 0;\ s_r + s_\varphi = 0;\\ \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi);\ s_r = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi);\ s_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi},\end{gathered} \tag{2}$$

а функция упрочнения

$$F(T) = A_3 T^2 = \frac{A_3}{2}\left(s_r^2 + s_\varphi^2 + 2 s_{r\varphi}^2\right);\ A_3 = 2 A_2 G^2. \tag{3}$$

Введем функцию напряжений $\Phi(r,\varphi)$ в виде полного разложения по параметру нагружения в окрестности особой точки, содержащего вместе с главной и правильную часть

$$\Phi(r,\varphi) = \sum_{n\ge 0} \Psi_n(\varphi)\, r^{\lambda_n}. \tag{4}$$

Здесь учитываются представления для приращений деформаций и напряжений, отвечающие увеличению параметра $K$

$$\delta e_{ij} = e_{ij,K}\,\delta K = e_{ij,r}\,\delta r;\ \delta s_{ij,K}\,\delta K = s_{ij,K}\delta r. \tag{5}$$

Отметим, что обобщение метода разложения по параметру нагружения достигается за счет того, что последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(\lambda_{n+1} > \lambda_n > 0)$ подлежит определению наряду с функциями $\Psi_n(\varphi)$.

Из представлений (1) – (5) и формул для компонент напряжений

$$s_r = \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \frac{1}{r}\Phi_{,\varphi\varphi},$$

$$s_{r\varphi} = \frac{1}{r^2}\Phi_{,\varphi} - \frac{1}{r}\Phi_{,r\varphi}$$

получим

$$\begin{gathered}s_r = \frac{1}{2}\sum_{k\ge 0}\left(\Psi_k'' + \lambda_k(2-\lambda_k)\Psi_k\right) r^{\lambda_k - 2},\\ s_{r\varphi} = \sum_{k\ge 0}(1-\lambda_k)\Psi_k'\, r^{\lambda_k - 2},\\ F(T) = \frac{A_3}{4}\sum_{k\ge 0}\sum_{l\ge 0} a_{kl} r^{\lambda_k + \lambda_l - 4},\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$a_{kl} = \Psi_k''\Psi_l'' - 2\lambda_l(2-\lambda_l)\Psi_l\Psi_k'' + 4(1-\lambda_k)(1-\lambda_l)\Psi_k'\Psi_l' + \lambda_k\lambda_l(2-\lambda_k)(2-\lambda_l)\Psi_k\Psi_l.$$

Используя определяющие соотношения (1), находим для деформаций

$$\begin{gathered}e_{r'r} = \frac{1}{2}\sum_{k\ge 0}(\lambda_k - 2)\left(\Psi_k'' + \lambda_k(2-\lambda_k)\Psi_k\right) r^{\lambda_k - 3} + \frac{A_3}{8}\sum_{k\ge 0}\sum_{l\ge 0}\sum_{m\ge 0}\alpha_{klm}\, r^{\mu_{klm} - 7},\\ e_{r\varphi'r} = \sum_{k\ge 0}(1-\lambda_k)(\lambda_k - 2)\Psi_k'\, r^{\lambda_k - 3} + \frac{A_3}{4}\sum_{k\ge 0}\sum_{l\ge 0}\sum_{m\ge 0}\beta_{klm}\, r^{\mu_{klm} - 7},\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}\alpha_{klm} = (\lambda_k + \lambda_l - 4)\left(\Psi_m'' + \lambda_m(2-\lambda_m)\Psi_m\right) a_{kl};\\ \beta_{klm} = (\lambda_k + \lambda_l - 4)(1-\lambda_m)\Psi_m'\, a_{kl};\\ \mu_{klm} = \lambda_k + \lambda_l + \lambda_m.\end{gathered}$$

Подставляя в уравнение совместности деформаций в цилиндрической системе координат, предварительно дифференцируемое по $r$, выражения (6), (7), приходим к уравнению

$$\sum_{k\geq 0}\left(2-\lambda_k\right)\left(\Psi_k^{(4)}-\left(3\lambda_k^2-5\lambda_k+4\right)\Psi_k''-\lambda_k^2\left(2-\lambda_k\right)\Psi_k\right)\times$$
$$\times r^{\lambda_k-3}-\frac{A_3}{4}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}\left(\alpha'_{klm}-4\left(\mu_{klm}-5\right)\beta'_{klm}-\left(\mu_{klm}-3\right)\left(\mu_{klm}-7\right)\alpha_{klm}\right)\times r^{\mu_{klm}-7}=0. \quad (8)$$

Так как напряжения сингулярны при $r\to 0$, то $\lambda_0<3$. Сравнивая первые слагаемые в (8) $\left(k=l=m\right)$, имеем

$$\lambda_0-3>\mu_{000}-7\ \left(\mu_{000}=3\lambda_0\right).$$

Таким образом, с учетом трех членов разложения получим три рекуррентные краевые задачи для функций $\Psi_k\left(\varphi\right)$

$$\alpha'_{000}-4\left(3\lambda_0-5\right)\beta'_{000}-\left(2\lambda_0-3\right)\left(3\lambda_0-7\right)\alpha_{000}=0,$$
$$\alpha'_{001}-4\left(\lambda_0-1\right)\beta'_{001}-\left(\lambda_0+1\right)\left(\lambda_0-3\right)\alpha_{001}=\frac{4}{A_3}\left(\Psi_0^{(4)}-\left(3\lambda_0^2-5\lambda_0+4\right)\Psi_0''-\lambda_0^2\left(2-\lambda_0\right)\Psi_0\right); \quad (9)$$
$$\begin{aligned}&\alpha'_{200}-4\left(3-\lambda_0\right)\beta'_{200}-\left(5-\lambda_0\right)\left(1-\lambda_0\right)\alpha_{200}+\alpha'_{020}-4\left(3-\lambda_0\right)\beta'_{020}-\\&-\left(5-\lambda_0\right)\left(1-\lambda_0\right)\alpha_{020}+\alpha'_{002}-4\left(3-\lambda_0\right)\beta'_{002}-\left(5-\lambda_0\right)\left(1-\lambda_0\right)\alpha_{002}=\\&=-\alpha'_{110}+4\left(\lambda_0-1\right)\beta'_{110}+\left(\lambda_0+1\right)\left(\lambda_0-3\right)\alpha_{110}-\alpha'_{101}+4\left(\lambda_0-1\right)\beta'_{101}+\\&+\left(\lambda_0+1\right)\left(\lambda_0-3\right)\alpha_{101}-\alpha'_{011}+4\left(\lambda_0-1\right)\beta'_{011}+\left(\lambda_0+1\right)\left(\lambda_0-3\right)\alpha_{011}+\\&+\frac{4}{A_3}\left(\lambda_1-2\right)\left(\Psi_1^{(4)}-\left(3\lambda_1^2-5\lambda_1+4\right)\Psi_1''-\lambda_1^2\left(2-\lambda_1\right)\Psi_1\right).\end{aligned} \quad (10)$$

Дифференциальные уравнения (9), (10) на каждом этапе дополним группой краевых условий на свободной поверхности $L''\left(\varphi=0\right)$ полуплоскости с учетом $\sigma_\varphi=\sigma_{r\varphi}=0$, а также условием на участке $L'\left(\varphi=\pi\right)$, при отсутствии трения в области контакта и с учетом несжимаемости материала и кинематических уравнений получим

$$\begin{aligned}&\varphi_n\left(0\right)=0, \qquad \varphi'_n\left(0\right)=0,\\&\varphi'_n\left(\pi\right)=0, \qquad \Psi'''_n\left(\pi\right)=0,\end{aligned}\quad k=0,\,1,\,2. \quad (11)$$

Итак, возникает однородная краевая задача (9), (11) на первом шаге ( $n=0$ ) и неоднородные краевые задачи (10), (11) на втором и третьем шаге $\left(n=1,2\right)$. Данные задачи являются задачами определения собственного значения $\lambda_n$ и соответствующей собственной функции $\Psi_n\left(\varphi\right)$ нелинейного дифференциального оператора. Заметим, что $\lambda_0$, соответствующие нетривиальному решению задачи, отыскиваются как с помощью численного анализа, так и из энергетических соображений [9]. Для разрешимости указанных задач должны выполняться дополнительные условия, возникающие из-за того, что функции $\alpha_{klm}\left(\varphi\right)$, $\beta_{klm}\left(\varphi\right)$ зависят от $\Psi_n\left(\varphi\right)$ с индексами $\min\left\{k,l,m\right\}\leq n\leq\max\left\{k,l,m\right\}$. Например, для задачи (9), (11)

$$\lambda_0-3=\mu_{100}-7\ \left(\mu_{100}=\mu_{010}=\mu_{001}=2\lambda_0+\lambda_1\right),$$

откуда $\lambda_1=4-\lambda_0$. И в общем случае

$$\lambda_n-3=\mu_{klm}-7\ \left(k+l+m=n+1\right),$$

т. е.

$$\lambda_n=2n\left(2-\lambda_0\right)+\lambda_0\ \left(n=0,\,1,\,2,...\right). \quad (12)$$

Из (12) заключаем, что $\lambda_n>1$ $\left(n\geq 1\right)$, и поэтому в разложениях для $s_r$, $s_{r\varphi}$ (6) сингулярными являются лишь первые члены $\left(n=0\right)$.

Указанные краевые задачи решались численно с использованием метода пристрелки. Расчеты производились для меди с модулем объемного сжатия $K$=1,317483E11 Н/м$^2$, сдвиговым модулем $G$ = 0,442431E11 Н/м$^2$ и постоянной $A_2$=1,3270501E-0,5, характеризующей нелинейность диаграммы

деформирования материала. Напряжения и деформации $s_{ij}, e_{ij}$ отнесем к внешним усилиям интенсивности $P$.

На рис. 1 *а* представлены зависимости радиального напряжения от расстояния $r$ до угловой точки при различных $0 < \varphi < \pi$, на рис. 1 *б* – зависимости радиального напряжения от полярного угла при различных расстояниях $0 < r < 1$. Аналогичные зависимости для касательных напряжений приведены на рис. 2 *а, б*. Распределение напряжений от обеих переменных задачи представлено на рис. 3 *а*, *б*.

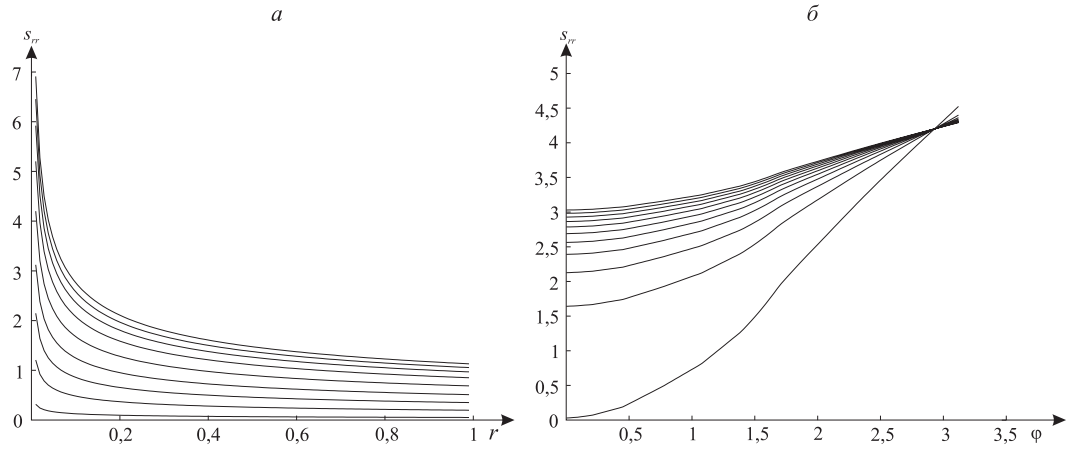


Рис. 1. Семейства зависимостей нормальных напряжений $s_{rr}$ от полярного радиуса $r$ (*а*) и угла φ (*б*) для различных значений угла и радиуса в окрестности угловой точки

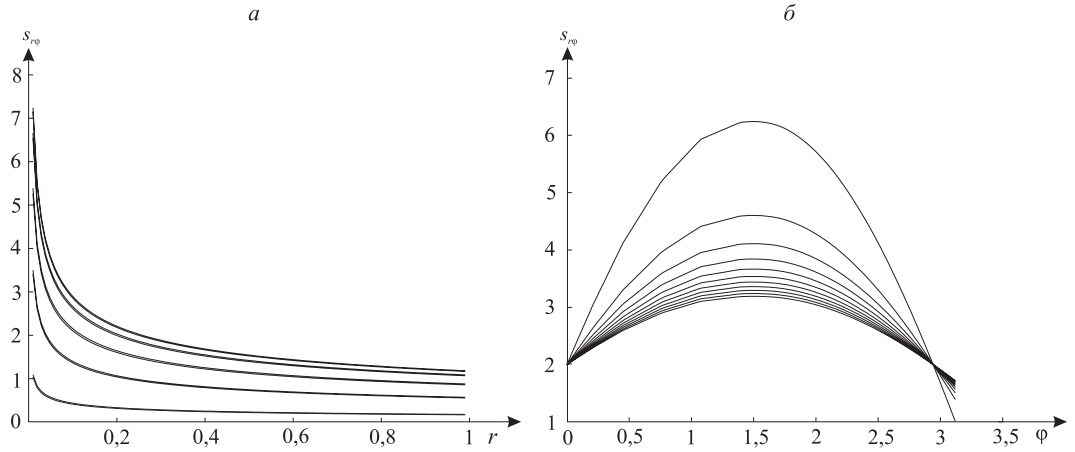


Рис. 2. Семейства зависимостей касательных напряжений $s_{r\varphi}$ от полярного радиуса $r$ (*а*) и угла φ (*б*) при различных значениях угла и радиуса в окрестности угловой точки

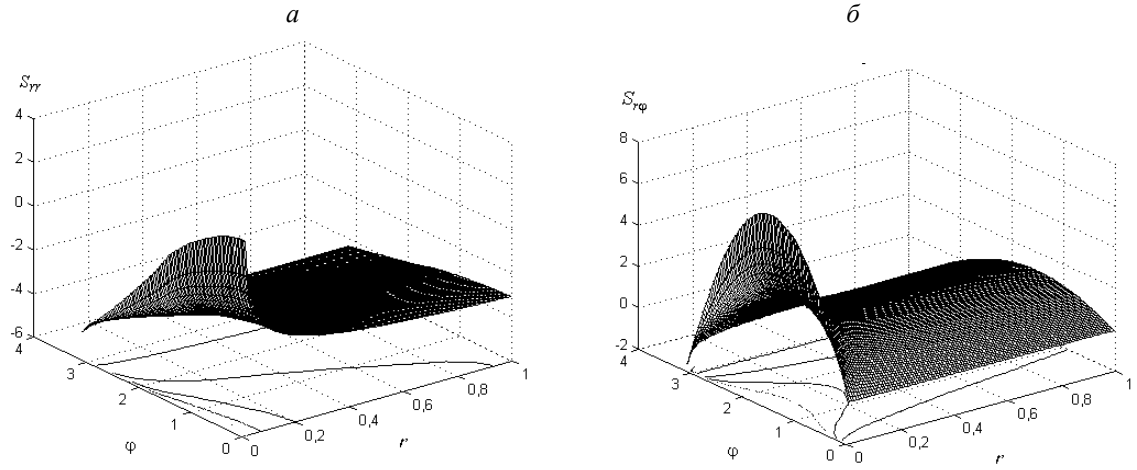


Рис. 3. Распределение нормальных $s_{rr}$ (*а*) и касательных $s_{r\varphi}$ (*б*) напряжений на интервале $r$, φ $\left(0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi\right)$

Увеличение нормальных напряжений под штампом в непосредственной окрестности угловой точки и на удалении от нее для точек под свободной от штампа поверхностью и нагруженной достигает 3,5 раза. В то же время проявляется существенная зависимость величины нормальных напряжений от расстояния до угловой точки в связи с учетом пластических свойств материала. Так, уменьшение абсолютных значений нормальных напряжений составляет от 15 до 21 % по радиусу от соответствующего значения в линейной теории в принятом интервале изменения переменных. Хотя при удалении от штампа наблюдается более равномерное распределение напряжений за счет более полного учета пластических свойств материала.

Противоположная ситуация наблюдается для касательных напряжений. Максимальных значений касательные напряжения достигают непосредственно под угловой точкой $(\varphi = \pi / 2)$, а при удалении от нее достаточно быстро уменьшаются; при увеличении радиуса скорость изменения касательных напряжений уменьшается, но не так значительно, как в линейном случае.

Влияние добавочных членов составляет для нормальных напряжений 14 % – для второго и 3 % – для третьего, для касательных напряжений – 9 и 2 % соответственно.

Проведенный численный анализ полных разложений в рядах для упрочняющихся сред позволяет получить более адекватные оценки полей напряжений и деформаций на конечных расстояниях от особой точки и может быть использован как в задачах теории пластичности, так и в моделях механики разрушения.

1. Илюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М., 1963.
2. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М., 1978.
3. Ибрагимов В.А., Нифагин В.А. // Теорет. и прикл. механика: Респ. межвед. сб. Мн., 1989. Вып. 16. С. 40.
4. Ибрагимов В.А., Нифагин В.А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1990. С. 30.
5. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М., 2001.
6. Клюшников В.Д., Шачнев В.А. // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 84.
7. Ибрагимов В.А., Нифагин В.А. // Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1988. № 15. С. 50.
8. Черепанов Г.П. // Механика твердого деформированного тела. Л., 1979. С. 467.
9. Черепанов Г.П. // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3.

Поступила в редакцию 13.05.10.

***Владимир Александрович Нифагин*** – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой инженерной математики БНТУ.