УСЛОВИЯ ЦЕНТРА СИСТЕМЫ СО СЛОЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

For the planar differential system with 8 parameters and degenerate monodromic singular point was obtained necessary and sufficient center conditions.

Данная работа посвящена проблеме различения центра и фокуса. Рассмотрим вещественную автономную аналитическую систему дифференциальных уравнений на плоскости

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

где P, Q – аналитические в некоторой окрестности начала координат функции, принимающие действительные значения. Будем также считать, что система (1) имеет изолированную особую точку $O(0,0)$. Известно [1, 2], что при помощи того или иного метода расщепления сложной особой точки путем решения конечного числа алгебраических уравнений и вычисления конечного числа арифметических операций определяется топологический тип расположения траекторий системы (1) в окрестности точки покоя с точностью до различения центра и фокуса. Поэтому далее будем считать, что особая точка системы (1) является центром или фокусом, такую особую точку называют монодромной.

Если разложения в ряд Тейлора правых частей системы (1) в точке $O(0,0)$ начинаются с линейных членов, то необходимым и достаточным условием центра в начале координат является обращение в ноль счетного числа ляпуновских фокусных величин, представляющих собой многочлены с целыми коэффициентами от коэффициентов разложений правых частей системы (1) [3]. Системы, разложения правых частей которых начинаются с членов второй степени, не могут иметь монодромной особой точки. Далее будем рассматривать систему (1), в разложении правых частей которой отсутствуют свободные, линейные и квадратичные члены.

А.П. Садовским при помощи интегралов Г. Дюлака [4] получен метод построения функции последования монодромной особой точки системы (1) [5, 6]. На основании данного метода в работах [7–10]

разработан алгоритм построения асимптотического разложения функции последования монодромной особой точки системы (1). При помощи этого разложения можно найти необходимые условия центра системы (1). Ю.С. Ильяшенко привел пример системы со сложной монодромной особой точкой, проблема центра и фокуса для которой алгебраически не разрешима [11]. Н.Б. Медведевой доказана аналитическая разрешимость проблемы центра и фокуса для каждого простейшего монодромного класса [12]. Очевидно, что для достаточно большого класса систем проблема центра и фокуса алгебраически разрешима, но пока не известны методы нахождения условий центра для данных систем (не считая построения функции последования). В.В. Амелькиным и И.В. Гайшуном доказано, что особая точка $O(0,0)$ системы (1) есть центр тогда и только тогда, когда в окрестности начала координат система (1) имеет первый интеграл [13]. Однако эффективных способов построения первого интеграла в общем случае не найдено. Если необходимые условия центра можно получить при помощи функции последования, то способов нахождения достаточных условий центра нет (не считая случая симметрии). Для решения данных проблем предлагается сначала получить достаточно широкий класс систем со сложной монодромной особой точкой типа центр.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений со сложной монодромной особой точкой $O(0,0)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^2y - y^5 + a_1xy^4, \\ \dot{y} &= x^3 + a_2y^5 + a_3xy^3 + a_4xy^4 + a_5x^2y^2 + a_6x^2y^3 + a_7x^4 + a_8x^5, \end{aligned} \quad (2)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_8 \in R$. В данной работе при помощи алгоритма построения асимптотического разложения полурегулярной функции соответствия [8] вычислим асимптотическое представление функции последования особой точки $O(0,0)$ системы (2) с точностью до членов порядка $o(c^8)$. При помощи полученного представления функции последования найдем необходимые условия центра и докажем, что эти условия являются и достаточными.

Переходя в системе (2) к полярным координатам и исключая время t , получаем уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{g_1(\varphi)r^2 + g_2(\varphi)r^3}{\cos^2\varphi + g_3(\varphi)r + g_4(\varphi)r^2}, \quad (3)$$

где $g_1(\varphi), g_2(\varphi), g_3(\varphi), g_4(\varphi)$ – многочлены от переменных $\sin\varphi, \cos\varphi$. Так как в числителе правой части уравнения (3) отсутствует слагаемое с переменной r в первой степени, то функция соответствия $r(\pi/2, 0, c)$ является полурегулярной [8]. Здесь $r(\varphi, \varphi_0, c)$ – решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $r(\varphi_0, \varphi_0, c) = c$.

Заменой $r = \tilde{r} \cos\varphi$ уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{d\tilde{r}}{d\varphi} = \tilde{r} \operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{\cos\varphi} \sum_{k=2}^{\infty} R_k(\varphi) \tilde{r}^k, \quad (4)$$

где $R_k(\varphi)$ – многочлены от переменных $\cos\varphi, \sin\varphi$. Уравнение (4) имеет первый интеграл вида

$$\cos\varphi \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\varphi) \tilde{r}^k = c, \quad (5)$$

где $v_1(\varphi) = 1, v_k(\varphi) = \cos^{k-1}\varphi \int_0^\varphi f_{v,k}(\tau) d\tau, f_{v,k}(\varphi) = \frac{-1}{\cos^k\varphi} \sum_{j=2}^k (k-j+1)R_j(\varphi)v_{k-j+1}(\varphi)$. Из интеграла (5) находим функцию $r(\arccos c^\beta, 0, c)$ с точностью $o(c^8)$, $\beta = 1/2$,

$$r(\arccos c^\beta, 0, c) = c + (V_{1,2}(1) - a_3 \ln c^\beta)c^2 + \dots + o(c^8), \quad (6)$$

где функции $V_{1,2}(u), V_{1,3}(u), \dots, V_{1,8}(u)$ имеют вид

$$\begin{aligned} V_{1,2}(u) &= a_3 \ln u + \int_0^u \left(\frac{-f_{v,2}(\arccos \tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{a_3}{\tau} \right) d\tau, \\ V_{1,3}(u) &= \frac{-a_2}{u} + (a_4 - 1 - a_3^2 + a_3^2 \ln u - 2a_3 V_{1,2}(1)) \ln u + \\ &+ \int_0^u \left(\frac{-f_{v,3}(\arccos \tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{a_2}{\tau^2} - \frac{(a_4 - 1 - a_3^2 + 2a_3^2 \ln \tau - 2a_3 V_{1,2}(1))}{\tau} \right) d\tau, \end{aligned}$$

$$V_{1,k}(u) = \sum_{i=0}^{k-2} P_{k,i}(\ln u)u^{-i} + \int_0^u \left(\frac{-f_{v,k}(\arccos \tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} - \sum_{i=1}^{k-1} Q_{k,i}(\ln \tau)\tau^{-i} \right) d\tau, \quad k = 4, \dots, 8,$$

здесь $P_{k,i}, Q_{k,i}$ – многочлены.

Заменой переменных $r = \rho \sin \theta$, $\cos \varphi = \rho \cos \theta$ уравнение (3) преобразовывается к виду

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \sum_{k=2}^{\infty} G_k(\theta)\rho^k, \tag{7}$$

где $G_k(\theta)$ – многочлены от переменных $\cos \theta$, $\sin \theta$. Уравнение (7) имеет первый интеграл

$$\sin \theta \sum_{k=1}^{\infty} w_k(\theta)\rho^k = s, \tag{8}$$

где $w_1(\theta) = 1$, $w_k(\theta) = \sin^{k-1} \theta \int_{\pi/2}^{\theta} f_{w,k}(\tau) d\tau$, $f_{w,k}(\theta) = \frac{-1}{\sin^k \theta} \sum_{j=2}^k (k-j+1)G_j(\theta)w_{k-j+1}(\theta)$.

Вычисляя при помощи (6) значения переменных θ и ρ при $\varphi = \arccos c^\beta$, $r = r(\arccos c^\beta, 0, c)$ и подставляя их в (8), получим

$$r(\pi/2, 0, c) = s = c + (V_{1,2}(1) - W_{1,2}(1) - a_3 \ln c)c^2 + \dots + o(c^8), \tag{9}$$

где функции $W_{1,2}(u), W_{1,3}(u), \dots, W_{1,8}(u)$ имеют вид

$$\begin{aligned} W_{1,2}(u) &= -a_3 \ln u + \int_0^u \left(\frac{f_{w,2}(\arcsin \tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{a_3}{\tau} \right) d\tau, \\ W_{1,3}(u) &= \frac{a_5}{u} + (1 - a_4 + 2a_3^2 + a_3^2 \ln u + 2a_3 W_{1,2}(1)) \ln u + \\ &+ \int_0^u \left(\frac{f_{w,3}(\arcsin \tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{a_5}{\tau^2} - \frac{(1 - a_4 + 2a_3^2 + 2a_3^2 \ln \tau + 2a_3 W_{1,2}(1))}{\tau} \right) d\tau, \\ W_{1,k}(u) &= \sum_{i=0}^{k-2} P_{k,i}(\ln u)u^{-i} + \int_0^u \left(\frac{f_{w,k}(\arcsin \tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} - \sum_{i=1}^{k-1} Q_{k,i}(\ln \tau)\tau^{-i} \right) d\tau, \quad k = 4, \dots, 8, \end{aligned}$$

здесь $P_{k,i}, Q_{k,i}$ – многочлены.

Из асимптотического представления (9) функции соответствия $r(\pi/2, 0, c)$ находим представление функции

$$r(0, \pi/2, s) = s + (a_3 \ln s - V_{1,2}(1) + W_{1,2}(1))s^2 + \dots + o(s^8). \tag{10}$$

Для построения функции последования найдем функции соответствия $r(\pi/2, \pi, c)$, $r(\pi, \pi/2, s)$. Для этого заметим, что если в системе (2) сделать замену переменных $x = -X$, $y = Y$, $t = -T$, то получим систему, которая отличается от системы (2) лишь тем, что параметры

$$a_1, a_2, a_5, a_6, a_7 \tag{11}$$

меняются на противоположные (относительно сложения). Поэтому из формул (9), (10) имеем

$$r(\pi/2, \pi, c) = c + (V_{2,2}(1) - W_{2,2}(1) - a_3 \ln c)c^2 + \dots + o(c^8), \tag{12}$$

$$r(\pi, \pi/2, s) = s + (a_3 \ln s - V_{2,2}(1) + W_{2,2}(1))s^2 + \dots + o(s^8), \tag{13}$$

где функции $V_{2,2}(u)$, $W_{2,2}(u)$, ..., $V_{2,8}(u)$, $W_{2,8}(u)$ получаются из соответствующих функций $V_{1,2}(u)$, $W_{1,2}(u)$, ..., $V_{1,8}(u)$, $W_{1,8}(u)$ заменой параметров (11) на противоположные.

Из формул (9), (10), (12), (13) имеем

$$r(\pi, 0, c) = c + (V_{1,2}(1) - V_{2,2}(1) - W_{1,2}(1) + W_{2,2}(1))c^2 + \dots + o(c^8), \tag{14}$$

$$r(0, \pi, s) = s + (V_{2,2}(1) - V_{1,2}(1) + W_{1,2}(1) - W_{2,2}(1))s^2 + \dots + o(s^8). \tag{15}$$

Для исследования поведения решений системы (2) в третьей и четвертой четвертях заметим, что при замене переменных $x = X$, $y = -Y$, $t = -T$ в системе (2) получаем систему, которая отличается от (2) лишь знаками при параметрах

$$a_1, a_2, a_3, a_6. \tag{16}$$

Исходя из этого, из формулы (15) имеем

$$r(2\pi, \pi, s) = s + (V_{3,2}(1) - V_{4,2}(1) + W_{4,2}(1) - W_{3,2}(1))s^2 + \dots + o(s^8), \quad (17)$$

где функции $V_{3,2}(u)$, $W_{3,2}(u)$, $V_{4,2}(u)$, $W_{4,2}(u)$, ..., $V_{3,8}(u)$, $W_{3,8}(u)$, $V_{4,8}(u)$, $W_{4,8}(u)$ получаются из соответствующих функций $V_{2,2}(u)$, $W_{2,2}(u)$, $V_{1,2}(u)$, $W_{1,2}(u)$, ..., $V_{2,8}(u)$, $W_{2,8}(u)$, $V_{1,8}(u)$, $W_{1,8}(u)$ заменой параметров (16) на противоположные.

Из формул (14) и (17) получаем асимптотическое представление функции последования особой точки $O(0,0)$ системы (2)

$$r(2\pi, 0, c) = c + k_{2,0}c^2 + k_{3,0}c^3 + (k_{4,1} \ln c + k_{4,0})c^4 + \sum_{i=5}^8 \sum_{j=0}^{i-3} k_{i,j} c^i \ln^j c + o(c^8). \quad (18)$$

Здесь $k_{2,0} = 2\pi a_2$, $k_{3,0} = \frac{1}{4} \pi(3a_1 - 15a_2 + 16\pi a_2^2 - 5a_3 a_5 + 3a_6 - a_3 a_7)$, $k_{4,1} = \pi(-2a_2 - a_1 a_3^2 + 2a_2 a_4 + 2a_3 a_5)$,

$$k_{5,1} = \frac{2}{3} k_{4,1} (9\pi a_2 + 2a_5 + a_7), \quad k_{6,3} = a_3^2 k_{4,1}.$$

Остальные коэффициенты в связи с их громоздкостью не приводятся. Отметим, что все вычисленные коэффициенты $k_{i,j}$ являются многочленами от параметров системы (2) $a_1, a_2, \dots, a_8$ с коэффициентами, в которых содержатся иррациональные числа

$$\pi, \quad \ln 2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}, \quad \zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}.$$

Теорема. Особая точка $O(0,0)$ системы (2) является центром тогда и только тогда, когда справедлива хотя бы одна из следующих трех серий условий:

- 1) $a_1 = 0, a_2 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = 0$;
- 2) $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_6 = 0$;
- 3) $a_1 + a_6 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 0, a_7 = 0, a_8 = 0$.

Доказательство. Для того чтобы особая точка системы (2) являлась центром, необходимо, чтобы все коэффициенты $k_{i,j}$ в асимптотическом представлении (18) равнялись нулю, а это может быть лишь при выполнении хотя бы одной из серий условий 1), 2), 3). Необходимость доказана. Сравнивая 1) с (11) и 2) с (16), видим, что при выполнении 1) траектории системы (2) симметричны относительно прямой OY , а при справедливости условий 2) траектории системы (2) симметричны относительно прямой OX , поэтому траектории системы не могут быть спиралями, следовательно, они являются замкнутыми кривыми. При выполнении условий 3) получаем, что $\dot{r} = 0$, поэтому и в этом случае траектории системы (2) являются замкнутыми. Теорема доказана.

Следствие. Особая точка $O(0,0)$ системы (2) является центром тогда и только тогда, когда траектории системы (2) симметричны относительно прямой OX или OY .

1. Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Мн., 1979.
2. Dumortier F. // J. Diff. Equat. 1977. Vol. 23. № 1. P. 53.
3. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.
4. Дюлак Г. О предельных циклах. М., 1980.
5. Садовский А. П. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 5. С. 790.
6. Садовский А. П. // Там же. № 6. С. 950.
7. Чергинiec Д. Н. // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2008. № 1. С. 35.
8. Чергинiec Д. Н. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2008. № 1. С. 71.
9. Садовский А. П., Чергинiec Д. Н. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1373.
10. Чергинiec Д. Н. // Труды XII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2007). Мн., 2007. С. 183.
11. Ильясенко Ю. С. // Функцион. анализ и его приложения. 1972. Т. 6. № 3. С. 30.
12. Медведова Н. Б. // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2006. Т. 254. С. 11.
13. Амелькин В. В., Гайшун И. В. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 9. С. 1560.

Поступила в редакцию 19.02.10.

Дмитрий Николаевич Чергинiec – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений.