УДК 512.664.3

Б.М. ДУБРОВ, А.В. МЕДВЕДЕВ

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СИСТЕМ ОДУ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

We compute cohomolgy spaces of Lie algebras that describe differential invariants of third order ordinary differential equations. We prove that the algebra of all differential invariants is generated by 2 tensorial invariants of order 2, one invariant of order 3 and one invariant of order 4. The main computational tool is a Serre – Hochschild spectral sequence and the representation theory of semisimple Lie algebras.

1. Данная работа посвящена вычислению пространств когомологий, отвечающих за инварианты систем обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Мы рассматриваем системы, разрешенные относительно старшей производной, с гладкой правой частью. В основе геометрии дифференциальных уравнений конечного типа лежит интерпретация дифференциальных уравнений как геометрических структур первого порядка на фильтрованных многообразиях. Данный подход был разработан в работе [1].

Под фильтрованным многообразием мы понимаем гладкое многообразие, оснащенное фильтрацией касательного расслоения, согласованного с оперцией коммутирования векторных полей. Теория геометрических структур на фильтрованных многообразиях была развита в работах Н. Танаки [2, 3] и Т. Моримото [4]. Ключевую роль в этой теории играет символ фильтрованного многообразия, который определяется как градуированная нильпотентная алгебра Ли, ассоциированная с фильтрацией гладкого многообразия в фиксированной точке. Аналогично определяется символ геометрической структуры, который является градуированной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Ее отрицательная часть $\mathfrak{g}_- = \sum_{i<0}\mathfrak{g}_i$ совпадает с символом фильтрованного многообразия.

При некоторых дополнительных условиях на алгебру Ли $\mathfrak{g}$ оказывается, что с каждой геометрической структурой на фильтрованном многообразии с символом $\mathfrak{g}$ можно естественным образом ассоциировать нормальную связность Картана. Это, в частности, позволяет решить проблему локальной эквивалентности таких геометрических структур и описать алгебру дифференциальных инвариантов для каждой такой структуры. Образующие в алгебре дифференциальных инвариантов находятся во взаимно однозначном соответствии с положительной частью пространства когомологий $H^2(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g})$. Вычисление этого пространства является одним из ключевых шагов при исследовании геометрических структур на фильтрованных многообразиях.

В данной работе мы явно вычисляем пространство $H^2(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g})$ и выделяем его положительную часть для случая, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ соответствует системе дифференциальных уравнений третьего порядка, имеющей гладкую правую часть:

$$y_i^{(3)} = f_i(x, y_i, y_i', y_i'').$$

Отметим, что для одного обыкновенного дифференциального уравнения аналогичные вычисления проведены в [5]. Для систем n уравнений второго порядка оказывается, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста и изоморфна $\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{R})$, а вычисление пространства когомологий $H^2(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g})$ может быть проведено при помощи классической теоремы Костанта [6].

Символ $\mathfrak{g}$ системы дифференциальных уравнений третьего порядка не является полупростым, и поэтому теорема Костанта в данном случае неприменима. Поэтому для вычисления $H^2(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g})$ мы рассматриваем спектральную последовательность Серра – Хохшильда, которая стабилизируется на втором члене и позволяет получить требуемый результат.

2. Символ системы обыкновенных дифференциальных уравнений ОДУ. Символ $\mathfrak{g}$ системы ОДУ, состоящей из m уравнений (n+1)-го порядка, изоморфен полупрямому произведению алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\times\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ и абелева идеала V. Обозначим алгебру $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\times\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ через $\mathfrak{a}$. Идеал V, в свою очередь, имеет вид $V_n\otimes\mathbb{R}^m$, где V_n − неприводимый $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-модуль размерности $n+1$.

В случае одного уравнения символ $\mathfrak{g}$ изоморфен полупростой алгебре $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$, и строение ее пространства когомологий широко известно [1, 7].

В дальнейшем мы будем изучать уравнение с символом

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\times\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})) \rightthreetimes (V_2\otimes\mathbb{R}^m).$$

Фиксируем базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ следующим образом. Пусть x, y, h – стандартный базис алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, заданный соотношениями

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y.$$

Данный базис представляется матрицами:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть векторы e_0, e_1, e_2 задают базис модуля V_2, фиксируемый соотношениями $x.e_i = e_{i-1}$. Пусть E_i – базис пространства $\mathbb{R}^m$ и E_j^i – соответствующий базис алгебры $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ такой, что $E_j^i.E_i = E_j$.

Введем градуировку в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$\mathfrak{g}_1 = \langle y \rangle,$$
$$\mathfrak{g}_0 = \langle h, E_j^i \rangle,$$
$$\mathfrak{g}_{-1} = \langle x \rangle + \langle e_2 \otimes \mathbb{R}^m \rangle,$$
$$\mathfrak{g}_{-2} = \langle e_1 \otimes \mathbb{R}^m \rangle,$$
$$\mathfrak{g}_{-3} = \langle e_0 \otimes \mathbb{R}^m \rangle.$$

Согласно результатам работы [1], инвариантам дифференциальных уравнений соответствует положительная часть (относительно индуцированной градуировки) пространства вторых когомологий $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$, вычисление которых будем производить с помощью спектральной последовательности Серра – Хохшильда [8]. Пусть $E_i^{p,q}$ – спектральная последовательность, построенная по идеалу V алгебры $\mathfrak{g}_-$. Тогда следующая лемма описывает пространство вторых когомологий в терминах спектральной последовательности.

Лемма 1. *Пространство когомологий* $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ *изоморфно прямой сумме пространств* $E_2^{1,1}$ *и* $E_2^{0,2}$, *где пространства* $E_2^{1,1}$ *и* $E_2^{0,2}$ *имеют следующий вид:*

$$E_2^{1,1} = H^1(\mathbb{R}x, H^1(V, \mathfrak{g})),$$
$$E_2^{0,2} = H^0(\mathbb{R}x, H^2(V, \mathfrak{g})).$$

Доказательство. Второй член E_2 последовательности Серра – Хохшильда имеет вид $E_2 = \oplus_{p,q} E_2^{p,q}$, где

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{R}x, H^q(V, \mathfrak{g})).$$

Так как алгебра $\mathbb{R}x$ имеет размерность 1, то

$$H^p(\mathbb{R}x, H^q(V, \mathfrak{g})) = 0, p > 1.$$

Следовательно, дифференциал

$$d_2^{p,q} : E_2^{p,q} \to E_2^{p+1,q-1}$$

равен нулю. Таким образом, спектральная последовательность стабилизируется на втором члене. Лемма доказана.

Пусть $V = V_{n_1} \oplus V_{n_2} \oplus \ldots \oplus V_{n_k}$ – разложение произвольного $\mathfrak{sl}_2$-модуля V на неприводимые компоненты. Тогда легко видеть, что

$$H^n(\mathbb{R}x, V) = \oplus_{i=1}^k H^n(\mathbb{R}x, V_{n_i}).$$

Лемма 2. *Пусть* V_m *является неприводимым* $\mathfrak{sl}_2$*-модулем размерности* $m+1$. *Тогда пространство* $H^0(\mathbb{R}x, V_m)$ *является одномерным пространством, порожденным старшим вектором* v_0 *модуля* V_m. *Пространство* $H^1(\mathbb{R}x, V_m)$ *одномерно и представлено отображением* $\alpha : x \to v_m$, *где* v_m *– младший вектор модуля* V_m. *Пространство* $H^n(\mathbb{R}x, V_m)$ *равно* 0 *для* $n > 1$.

Мы получили, что для описания пространства $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ достаточно знать строение $\mathfrak{sl}_2$-модулей пространств $H^1(V, \mathfrak{g})$ и $H^2(V, \mathfrak{g})$.

Пространства первых и вторых когомологий опишем с помощью оператора Спенсера $\mathcal{S}$ для подалгебры $\mathfrak{a}$

$$\mathcal{S}^n : \mathrm{Hom}(\wedge^n V, \mathfrak{a}) \to \mathrm{Hom}(\wedge^{n+1} V, V),$$

$$\mathcal{S}^n(\varphi)(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \varphi(v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_{n+1})v_i.$$

Лемма 3. *Выполняется* $H^0(V,\mathfrak{g}) = V$ *и*

$$H^n(V,\mathfrak{g}) = \ker \mathcal{S}^n \oplus \mathrm{Hom}(\wedge^n V, V) / \operatorname{im} \mathcal{S}^{n-1}.$$

Доказательство. Представим произвольный коцикл $\alpha \in C^n(V,\mathfrak{g})$ как $\alpha_V + \alpha_\alpha$, где $\alpha_V \in \mathrm{Hom}(\wedge^n V, V)$ и $\alpha_\mathfrak{a} \in \mathrm{Hom}(\wedge^n V, \mathfrak{a})$. Мы видим, что $\partial \alpha_v = 0$, так как подалгебра Ли V абелева. Тогда $\partial \alpha_\mathfrak{a} = \mathcal{S}^n(\alpha_\mathfrak{a})$, что доказывает утверждение леммы.

Следующая лемма позволяет легко вычислить степени элементов пространства когомологий относительно градуировки, индуцированной алгеброй $\mathfrak{g}$.

Лемма 4. *Пусть задан класс когомологий* $[c] \in H^k(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ *и выполнено*

$$h.c = \alpha c, \quad z.c = \beta c,$$

где $z = \sum_{i=1}^n E_i^i$ *– элемент центра алгебры* $\mathfrak{gl}_m$. *Тогда класс* $[c]$ *принадлежит пространству* $H_p^k(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$, *где*

$$p = -2\beta - \frac{\alpha}{2}.$$

Лемма 5. *Отображение* $\mathcal{S}^1$ *инъективно.*

Доказательство. В [9] перечислены все линейные редуктивные алгебры Ли, для которых отображение $\mathcal{S}^1$ имеет ненулевое ядро, алгебра $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{gl}(V)$ в ней отсутствует. Это доказывает лемму.

3. Описание пространства $E_2^{1,1}$. Опишем часть $E_2^{1,1}$ пространства когомологий $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. Мы уже знаем, что $E_2^{1,1} \cong H^1(\mathbb{R}x, H^1(V,\mathfrak{g}))$. Пространство $H^1(V,\mathfrak{g})$ изоморфно

$$\ker \mathcal{S}^1 \oplus \mathrm{Hom}(V,V) / \operatorname{im} \mathcal{S}^0.$$

По лемме 5 $\ker \mathcal{S}^1 = 0$. Выпишем оператор $\mathcal{S}^0$ явно:

$$\mathcal{S}^0 : \mathrm{Hom}(\mathbb{R},\mathfrak{a}) \to \mathrm{Hom}(V,V), \quad \mathcal{S}^0(\phi)(v) = -\phi(1)(v).$$

Таким образом, $\operatorname{im} \mathcal{S}^0 = \mathfrak{a}$. Следовательно, $E_2^{1,1} = H^1(\mathbb{R}x, \mathfrak{gl}(V)/\mathfrak{a})$. Опишем строение пространства $\mathrm{Inv}_y(\mathfrak{gl}(V))$.

Теорема 1. *Пространство y-инвариантных элементов в* $\mathfrak{a}$*-модуле* $\mathfrak{g}l(V)/\mathfrak{g}$ *представляется в виде суммы*

$$\mathbb{R}y^2 \otimes \mathfrak{gl}(W) \oplus \mathbb{R}y \otimes \mathfrak{sl}(W).$$

При этом элементы $\varphi \in E_2^{1,1}$ *вида* $\phi : \mathbb{R}x \to \mathbb{R}y \otimes \mathfrak{sl}(W)$ *имеют степень* 2, *а элементы вида* $\phi : \mathbb{R}x \to \mathbb{R}y^2 \otimes \mathfrak{gl}(W)$ *имеют степень* 3.

4. Описание пространства $E_2^{0,2}$**.** Опишем пространство $\mathrm{Inv}_x H^2(V,\mathfrak{g})$. Как мы знаем,

$$H^2(V,\mathfrak{g}) = \frac{\ker \mathcal{S}^2 \oplus \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)}{\operatorname{im} \mathcal{S}^1}.$$

Теорема 2. *Пространство* $\ker \mathcal{S}^2$ *изоморфно как* $\mathfrak{a}$*-модуль пространству*

$$V_0 \otimes \mathcal{S}^2(W^*) + V_2 \otimes E, \textit{ если } m = 2,$$

$$V_0 \otimes \mathcal{S}^2(W^*), \textit{ если } m \geq 3.$$

Опишем теперь строение пространства $E_2^{0,2} = \mathrm{Inv}_x H^2(V,\mathfrak{g})$. Пространство $\mathrm{Hom}(\wedge^2 V, V)$ имеет следующее строение как $\mathfrak{s}l_2(\mathbb{R})$-модуль:

$$\mathrm{Hom}(\wedge^2 V, V) = \left(S^2(V_2^*) \otimes \wedge^2 W^* + \wedge^2 V_2^* \otimes S^2(W^*)\right) \otimes V_2 \otimes W =$$

$$= ((V_4 \oplus V_0) \otimes V_2) \otimes \wedge^2 W^* \otimes W + V_2 \otimes V_2 \otimes S^2(W^*) \otimes W =$$

$$= (V_6 \oplus V_4 \oplus 2V_2) \otimes \wedge^2 W^* \otimes W + (V_4 \oplus V_2 \oplus V_0) \otimes S^2(W^*) \otimes W.$$

Заметим, что пространство $\operatorname{im}\mathcal{S}^1$ изоморфно $\operatorname{Hom}(V,\mathfrak{a}),$ которое имеет следующее строение:

$$\operatorname{Hom}(V,\mathfrak{a}) = V_2^* \otimes W^* \otimes (V_2 + V_0 \otimes W^* \otimes W) =$$
$$= (V_4 \oplus V_2 \oplus V_0) \otimes W^* + V_2 \otimes W^* \otimes W^* \otimes W.$$

Пусть $\alpha \in \operatorname{Hom}(V,\mathfrak{a})$. Тогда отображение $\mathcal{S}^1(\alpha) \in \operatorname{Hom}(V \wedge V, V)$ действует следующим образом:

$$\mathcal{S}^1(\alpha)(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) = \alpha(v_1 \otimes w_1).v_2 \otimes w_2 - \alpha(v_2 \otimes w_2).v_1 \otimes w_1. \qquad (1)$$

Из (1) мы видим, что

$$\operatorname{Hom}(\wedge^2 V, V) / V_2^* \otimes W^* \otimes W^* \otimes W) =$$
$$= (V_6 \oplus V_4 \oplus V_2) \otimes \wedge^2 W^* \otimes W \oplus (V_4 \oplus V_0) \otimes S^2(W^*) \otimes W. \qquad (2)$$

Из выражения (2) следует, что

$$V_2 \otimes W^* \subset V_2 \otimes \wedge^2 W^* \otimes W,$$
$$V_0 \otimes W^* \subset V_0 \otimes S^2(W^*) \otimes W.$$

Пространство $V_2 \otimes \wedge^2 W^* \otimes W / V_2 \otimes W^*$ можно отождествить с бесследовой частью $V_2 \otimes \wedge^2 W^* \otimes W,$ а пространство $V_0 \otimes S^2(W^*) \otimes W / V_0 \otimes W^*$ – с бесследовой частью пространства $V_0 \otimes S^2(W^*) \otimes W.$

Посчитаем степени найденных элементов пространства $E_2^{0,2}$. Применим лемму 4. Пусть для x-инвариантного элемента c имеют место равенства $h.c = \alpha c,$ $z.c = \beta c.$ Тогда резюмируем вычисления табл. 1.

Таблица 1

Степени элементов пространства $E_2^{0,2}$

Пространство	Содержится в	α	β	Степень
$V_6 \otimes \wedge^2(W^*) \otimes W$	$\operatorname{Hom}(\wedge^2 V, V) / \operatorname{im}\mathcal{S}^1$	4	–1	0
$V_4 \otimes S_0^2(W^*) \otimes W$	$\operatorname{Hom}(\wedge^2 V, V) / \operatorname{im}\mathcal{S}^1$	4	–1	0
$V_4 \otimes \wedge^2(W^*) \otimes W$	$\operatorname{Hom}(\wedge^2 V, V) / \operatorname{im}\mathcal{S}^1$	4	–1	0
$V_2 \otimes \wedge_0^2 W^* \otimes W$	$\operatorname{Hom}(\wedge^2 V, V) / \operatorname{im}\mathcal{S}^1$	2	–1	1
$V_0 \otimes S_0^2(W^*) \otimes W$	$\operatorname{Hom}(\wedge^2 V, V) / \operatorname{im}\mathcal{S}^1$	0	–1	2
$V_0 \otimes S^2(W^*)$	$\ker\mathcal{S}^2 \subset \operatorname{Hom}(\wedge^2 V, \mathfrak{a})$	0	–1	4
V_2 при $m = 2$	$\ker\mathcal{S}^2 \subset \operatorname{Hom}(\wedge^2 V, \mathfrak{a})$	2	–2	3

Здесь через $S_0^2(W^*) \otimes W$ и $\wedge_0^2(W^*) \otimes W$ обозначена бесследовая часть пространств $S^2(W^*) \otimes W$ и $\wedge^2(W^*) \otimes W$ соответственно.

5. Соответствие классов когомологий и инвариантов систем ОДУ 3-го порядка. В заключение приведем табл. 2 соответствия известных инвариантов систем ОДУ 3-го порядка и классов когомологий. Данные результаты базируются на явном вычислении нормальной связности Картана до второй степени включительно. Отметим, что не все классы когомологий соответствуют нетривиальным инвариантам. Пусть v_0^i обозначает младший вектор модуля V_i. Тогда соответствие для системы вида $y_i''' = f(y_k'', y_l', y_r, x), i = 1,...,m$ (см. табл. 2).

Таблица 2

Соответствие классов когомологий инвариантам систем ОДУ 3-го порядка

Степень	Пространство	Инвариант
1	*2*	*3*
–1	$v_6^0 \otimes \langle^2(W^*) \otimes W$	$\equiv 0$
0	$v_4^0 \otimes S^2(W^*) \otimes W$	$\equiv 0$
0	$v_4^0 \otimes \langle^2(W^*) \otimes W$	$\equiv 0$
1	$v_2^0 \otimes \langle^2 W^* \otimes W / V_2 \otimes W^*$	$\equiv 0$
2	$x^* \otimes \mathbb{R}y \otimes \mathfrak{sl}(W)$	$W_2 = tr_0\left(\frac{\partial f^i}{\partial p_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f^i}{\partial q_j} + \frac{1}{3}\frac{\partial f^i}{\partial q_k}\frac{\partial f^k}{\partial q_j}\right)$

Окончание

1	2	3
2	$v_0^0 \otimes S^2(W^*) \otimes W$	$I_2 = tr_0\left(\dfrac{\partial^2 f^i}{\partial q^j \partial q^k}\right)$
3	$x^* \otimes \mathbb{R}y^2 \otimes \mathfrak{g}l(W)$	$W_3 = \dfrac{\partial f^i}{\partial y^j} - \dfrac{1}{3}\dfrac{d^2}{dx^2}\dfrac{\partial f^i}{\partial q^j} - \dfrac{1}{27}(\dfrac{\partial f^i}{\partial q^k})^3 + + \dfrac{2}{9}\dfrac{\partial f^i}{\partial q^k}\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f^k}{\partial q^j} + \dfrac{1}{9}\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f^i}{\partial q^k}\dfrac{\partial f^k}{\partial q^j}$
4	$v_0^0 \otimes S^2(W^*)$	$I_4 \neq 0$
3	$v_2^0,\ \ m = 2$	$\equiv 0$

Здесь переменные q_i соответствуют вторым производным $y_{i''}$, а p_i – первым производным $y_{i'}$. Через tr_0 обозначена бесследовая часть пространств соответствующих тензоров.

1. Doubrov B., Komrakov B., Morimoto T. // Lobachevskij J. of Math. 1999. Vol. 3. P. 39.
2. Tanaka N. // J. Math. Kyoto. Univ. 1970. Vol. 10. P. 1.
3. Tanaka N. // Hokkaido Math. J. 1979. Vol. 8. P. 23.
4. Morimoto T. // Ibid. 1993. Vol. 22. P. 263.
5. Doubrov B. // Differential Geometry and Its Applications: Proc. Conf. Opava (Czech Republic). 2001. P. 73.
6. Kostant B. // Ann. of Math. 1961. Vol. 24. P. 329.
7. Yamaguchi K. // Adv. Studies in Pure Math. 1993. Vol. 22. P. 413.
8. Фукс Д.Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М., 1984.
9. Kobayashi S., Nagano T. // J. Math. Mech. 1965. Vol. 14. P. 679.

Поступила в редакцию 21.09.09.

Борис Михайлович Дубров – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики.
Александр Валерьевич Медведев – аспирант кафедры математической физики. Научный руководитель – Б.М. Дубров.