

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Let $f(X)$ and $g(Y)$ be nonsingular quadratic forms over field K having dimension m and n , $\text{char } K \neq 2$. The following problem of a birational composition $f(X)$ and $g(Y)$ is considered: under which conditions the product $f(X)g(Y)$ is birationally equivalent over K to a quadratic form $h(Z)$ of dimension $m+n$ over K ?

The main result of the paper is a complete of the birational composition problem for quadratic forms $f(X)$ and $g(Y)$ over a finite field F_q , $\text{char } F_q \neq 2$.

Пусть K – поле характеристики $\neq 2$, $X = (x_1, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ и $Z = (z_1, \dots, z_{m+n})$ – независимые наборы переменных над K , $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы над полем K .

Определение. Если произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K , т. е. $f(X)g(Y)$ представляется квадратичной K -формой $h(Z)$ над $K(X, Y)$ и $x_i, y_j \in K(Z)$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K .

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о «сумме квадратов»: найти наименьшее t при заданных m и n , чтобы выполнялось тождество $(x_1^2 + \dots + x_m^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \Phi_1^2 + \dots + \Phi_t^2$, где Φ_i – билинейные формы от $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$ над K . Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны (см. [1, 2]). Обзор [3] посвящен результатам и методам изучения такой композиции квадратичных форм. Пфистер продолжил рассматривать такие тождества, но полагал, что Φ_i – рациональные функции от $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$. Им описаны мультипликативные квадратичные формы [4]. Первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K получены в [5], полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальными полями – в [6].

Основная цель настоящей статьи – решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над конечными полями.

Решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над конечным полем F_q , если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропна над F_q , следует из теоремы 1 статьи [5]: произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно $h(Z)$ над F_q тогда и только тогда, когда $h(Z)$ – любая ненулевая квадратичная форма размерности $m+n$, невырожденная часть которой изотропна над F_q .

Полное решение проблемы бирациональной композиции, когда обе квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропны над конечным полем F_q , дает

Теорема. Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы размерности m и n над конечным полем F_q , $\text{char } F_q \neq 2$, $m \leq n$. Тогда $1 \leq m \leq n \leq 2$, бирациональная композиция $h(Z)$ над F_q квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ всегда существует и определена однозначно с точностью до эквивалентности над F_q :

а) если $m = n = 1$, то $h(z_1, z_2) = c_1 c_2 z_1^2$, где $c_1 \in D_{F_q}(f)$, $c_2 \in D_{F_q}(g)$;

б) если $1 \leq m \leq n = 2$, то $h(z_1, \dots, z_{m+n}) = z_1^2 - \alpha z_2^2$, где $\alpha \in F_q^* / F_q^{*2}$.

В качестве следствия решения проблемы бирациональной композиции над F_q получаем, что любая квадратичная форма над конечным полем ранга ≤ 2 мультипликативна.

Имеем, что над конечным полем любые две квадратичные формы образуют бирациональную композицию. Естественно возникает вопрос: какому условию должно удовлетворять поле K , чтобы всегда существовала бирациональная композиция квадратичных форм над этим полем? Ответ на этот вопрос содержится в п. 2 настоящей статьи. Доказывается необходимое условие существования бирациональной композиции любых квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над K : индекс $[K^* : K^{*2}] \leq 2$. Обсуждается достаточность этого условия.

Основные понятия и обозначения традиционные (см. [7–9]).

1. Замечание 1. Согласно предложению 5 гл. IV из [7] существуют две квадратичные формы ранга 2 с точностью до эквивалентности над полем F_q $x_1^2 + x_2^2$ и $x_1^2 + \alpha x_2^2$, где $\alpha \in F_q^* / F_q^{*2}$. Если $-1 \in F_q^{*2}$, то первая из этих форм изотропна, а вторая анизотропна над полем F_q . Если $-1 \notin F_q^{*2}$, то первая из этих форм анизотропна, а вторая изотропна над F_q . Поэтому все анизотропные формы ранга 2 над F_q эквивалентны. В качестве представителя класса эквивалентности анизотропных квадратичных форм над F_q можно взять квадратичную форму $x_1^2 - cx_2^2$, где $c \in F_q^* / F_q^{*2}$.

Доказательство теоремы. Хорошо известно (см. [7], предложение 4, гл. IV), что если квадратичная форма анизотропна над конечным полем F_q , то ее размерность не превосходит 2. Поэтому $1 \leq m \leq n \leq 2$. Оставшиеся возможности для m и n исчерпываются следующими случаями:

а) $m = n = 1$,

б) $1 \leq m \leq n \leq 2$, т. е. $m = 1, n = 2$ и $m = n = 2$.

Из теоремы 2 статьи [5] следует, что если анизотропные квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над F_q , то $h(Z)$ определена однозначно с точностью до эквивалентности над F_q . Покажем, что в случаях а) и б) $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию над F_q и указанные в теореме квадратичные формы $h(Z)$ бирационально эквивалентны над F_q произведению $f(X)$ и $g(Y)$. Это и докажет нашу теорему.

В случае а) по определению $h(Z)$ – квадратичная форма от двух переменных. Если $f(X) = c_1 x_1^2$ и $g(Y) = c_2 y_1^2$, то $f(X)g(Y) = c_1 x_1^2 c_2 y_1^2 = c_1 c_2 z_1^2$, где $c_1 \in D_K(f)$, $c_2 \in D_K(g)$ и

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1, \\ z_2 = x_2. \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) следует, что

$$\begin{cases} x_1 = z_2, \\ y_1 = \frac{z_1}{z_2}. \end{cases} \quad (2)$$

Это и доказывает бирациональную эквивалентность над F_q произведения $f(X)g(Y)$ и квадратичной формы $h(z_1, z_2) = c_1 c_2 z_1^2$.

Случай б) требует более тщательного рассмотрения. Если $m = 1$ и $n = 2$, то $f(x_1) = c_1 x_1^2$ и согласно замечанию 1 в качестве $g(Y)$ можно взять $g(y_1, y_2) = y_1^2 - c y_2^2$, где $c \in F_q^* \setminus F_q^{*2}$. Произведение $f(X)g(Y) = c_1 (x_1 y_1)^2 - c_1 c (x_1 y_2)^2 = c_1 u_1^2 - c_1 u_2^2$, где

$$\begin{cases} u_1 = x_1 y_1, \\ u_2 = x_1 y_2, \\ u_3 = x_1. \end{cases} \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\begin{cases} x_1 = u_3, \\ y_1 = \frac{u_1}{u_3}, \\ y_2 = \frac{u_2}{u_3}. \end{cases} \quad (4)$$

Это и доказывает бирациональную эквивалентность над F_q произведения $f(X)g(Y)$ и квадратичной формы $q(u_1, u_2, u_3) = c_1 u_1^2 - c_1 c u_2^2 + 0 u_3^2$. Невырожденная часть квадратичной формы $q(u_1, u_2, u_3)$ – квадратичная форма $q_1(u_1, u_2) = c_1 u_1^2 - c_1 c u_2^2$ анизотропна согласно теореме 2 из [5]. Тогда по замечанию 1 $q_1(u_1, u_2)$ эквивалентна над F_q квадратичной форме $z_1^2 - \alpha z_2^2$, где $\alpha \in F_q^* \setminus F_q^{*2}$. Следовательно, $q(u_1, u_2, u_3)$ эквивалентна над F_q квадратичной форме $h(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - \alpha z_2^2 + 0 z_3^2$. А тогда $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над F_q квадратичной форме $h(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - \alpha z_2^2$, что и доказывает теорему в этом случае.

Если $m = n = 2$, то согласно замечанию 1 можем считать $f(X) = x_1^2 - \alpha x_2^2$ и $g(Y) = y_1^2 - \alpha y_2^2$, где $\alpha \in F_q^* \setminus F_q^{*2}$. Из теоремы 1 статьи [6] следует, что бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ существует, ибо $\frac{d(f)}{d(g)} = 1 \in F_q^{*2}$, и с точностью до F_q -эквивалентности равна $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1^2 - \alpha z_2^2$. Это и завершает доказательство случая б) теоремы.

Замечание 2. Из доказательства теоремы имеем: если $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы над полем F_q , то существует $h(z_1, \dots, z_{m+n}) = h(z_1, \dots, z_t)$, где h_1 – невырожденная часть квадратичной формы $h(Z)$, и при этом $z_1, \dots, z_t$ – билинейные функции от $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$. Иначе существует билинейная композиция квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$.

Определение (см. [8], гл. X, определение 2.2). Пусть q – квадратичная форма над K размерности n , $L = K(X, Y)$, где $X = (x_1, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ – две системы независимых переменных над K ; q называется мультипликативной, если справедливо равенство $q(X)q(Y) = q(z_1, \dots, z_n)$, где $z_i \in L$.

Очевидно, квадратичная форма ранга 1 мультипликативна над полем K тогда и только тогда, когда $q \sim x_1^2$ над K . Над конечным полем имеет место любопытное следствие из теоремы.

Следствие. Любая квадратичная форма над полем F_q ранга $n \geq 2$ мультипликативна.

Доказательство. Если q анизотропна над F_q , что может быть только при $n = 2$, то мультипликативность квадратичной формы q следует из доказательства теоремы в случае $m = n = 2$.

Если q изотропна над F_q , то ее мультипликативность следует из теоремы 1 статьи [5]: $q(X)q(Y)$ бирационально эквивалентно $h(z_1, \dots, z_{2n})$, и в качестве $h(z_1, \dots, z_{2n})$ можем взять квадратичную форму с невырожденной частью, равной $q(z_1, \dots, z_n)$.

2. Из решения проблемы бирациональной композиции над конечным полем имеем, что над этим классом полей любые две квадратичные формы образуют бирациональную композицию.

Естественно, возникает задача: описать поля, над которыми любые две квадратичные формы образуют бирациональную композицию.

Несложно установить необходимое условие на поле K , чтобы существовала бирациональная композиция произвольных невырожденных квадратичных форм над этим полем.

Предложение 1. Пусть для любых невырожденных квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем K существует бирациональная композиция над K . Тогда индекс $[K^* : K^{*2}] \leq 2$.

Доказательство. Предположим $[K^* : K^{*2}] > 2$. Тогда существует $\alpha, \beta \in K^*$ такие, что α, β и $\alpha\beta^{-1} \notin K^{*2}$. Возьмем $f(x_1, x_2) = x_1^2 - \alpha x_2^2$ и $g(y_1, y_2) = y_1^2 - \beta y_2^2$. Очевидно $f(x_1, x_2)$ и $g(y_1, y_2)$ – анизотропные бинарные квадратичные формы над K и $\frac{d(f)}{d(g)} = \alpha\beta^{-1} \notin K^{*2}$. Поэтому согласно теореме 1 из [6] бирациональной композиции этих квадратичных форм над K не существует. Это и доказывает предложение.

Исследуем достаточность этого условия. Если $[K^* : K^{*2}] = 1$, то над этим полем существует единственная анизотропная квадратичная форма с точностью до эквивалентности $f(x_1) = x_1^2$. Существование бирациональной композиции анизотропных квадратичных форм x_1^2 и y_1^2 очевидно. А существование бирациональной композиции квадратичных форм, одна из которых ранга ≥ 2 , а следовательно, изотропна над K , следует из теоремы 1 статьи [5].

Если $[K^* : K^{*2}] = 2$, то возможны два случая $-1 \in K^{*2}$ или $-1 \notin K^{*2}$.

Если $-1 \in K^{*2}$, то ситуация схожа с конечным полем. Справедливо

Предложение 2. Пусть K – поле, $[K^* : K^{*2}] = 2$ и $-1 \in K^{*2}$. Тогда квадратичная форма над полем K ранга ≥ 2 (соответственно ранга ≥ 3) представляет любой элемент из K^* (соответственно из K).

Доказательство. Для доказательства предложения в силу хорошо известных свойств о квадратичных формах над полями (см., например, [7], гл. IV, § 1) достаточно показать, что любая квадратичная форма ранга 3 над K изотропна.

Пусть $f(X)$ – квадратичная форма ранга 3 над K и ее канонический вид $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$, где $a_1a_2a_3 \neq 0$. Так как $[K^* : K^{*2}] = 2$, то среди a_1, a_2 и a_3 есть два элемента, принадлежащие одному смежному классу фактор-группы K^* / K^{*2} . Например, положим a_1 и a_2 принадлежат одному смежному классу. Тогда $f(X)$ над K эквивалентна $a_1(y_1^2 + y_2^2) + a_3y_3^2$. Но квадратичная форма $a_1(y_1^2 + y_2^2) + a_3y_3^2$ представляет нетривиально 0 над K , ибо $-1 \in K^{*2}$. Следовательно, $f(X)$ изотропна над K .

Следствие. Пусть K – поле, $[K^* : K^{*2}] = 2$ и $-1 \in K^{*2}$. Тогда все анизотропные квадратичные формы ранга 2 над K эквивалентны. И в качестве представителя класса эквивалентности можно взять квадратичную форму $x_1^2 - \alpha x_2^2$, где $\alpha \in K^* / K^{*2}$.

Доказательство. Пусть f – произвольная анизотропная квадратичная форма ранга 2 над K . Согласно предложению 2 f представляет $1 \in K^*$, поэтому она эквивалентна квадратичной форме $x_1^2 - \alpha x_2^2$ (см. [7], гл. IV, § 1.6). $\alpha \in K^* / K^{*2}$, ибо $x_1^2 - \alpha x_2^2$ анизотропна над K . Так как $[K^* : K^{*2}] = 2$, то все квадратичные формы $x_1^2 - \alpha x_2^2$ при разных $\alpha \in K^* / K^{*2}$ эквивалентны над K . Это доказывает эквивалентность всех анизотропных квадратичных форм ранга 2 над K . И квадратичная форма $x_1^2 - \alpha x_2^2$, где $\alpha \in K^* / K^{*2}$, является представителем этого класса эквивалентности.

Замечание 3. Решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над полем K , $[K^* : K^{*2}] = 2$ и $-1 \in K^{*2}$, повторяет схему решения над конечным полем. Более того, справедлив аналог теоремы для анизотропных форм.

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы размерности m и n над полем K , $[K^* : K^{*2}] = 2$ и $-1 \in K^{*2}$, $\text{char } K \neq 2$, $m \leq n$. Тогда $1 \leq m \leq n \leq 2$, бирациональная композиция над K квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ всегда существует и определена однозначно с точностью до эквивалентности над K :

а) если $m = n = 1$, то $h(z_1, z_2) = c_1c_2z_1^2$, где $c_1 \in D_K(f)$, $c_2 \in D_K(g)$;

б) если $1 \leq m \leq n = 2$, то $h(z_1, \dots, z_{m+n}) = z_1^2 - \alpha z_2^2$, где $\alpha \in K^* / K^{*2}$.

Утверждение, что $1 \leq m \leq n \leq 2$, следует из предложения 2. Остальная часть доказательства аналогична доказательству теоремы над F_q .

Если $-1 \notin K^{*2}$ и $[K^* : K^{*2}] = 2$, то любая анизотропная квадратичная форма f над K эквивалентна квадратичной форме $\pm(x_1^2 + \dots + x_n^2)$. Максимальное n , при котором $x_1^2 + \dots + x_n^2$ анизотропна, зависит от высоты поля K (см. [9], § 3).

В частности, если $K = \mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, то $[\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^{*2}] = 2$ и $-1 \notin \mathbb{R}^{*2}$. При любом n квадратичные формы $\pm(x_1^2 + \dots + x_n^2)$ анизотропны над $\mathbb{R}$. И в общем случае задача о бирациональной композиции квадратичных форм над K сводится к задаче о бирациональной композиции сумм квадратов. Вполне возможно, она имеет положительное решение.

1. Hurwitz A. // Math. Ann. 1923. Bd. 88. № 1-2. S. 1.

2. Radon J. // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1922. Bd. 1. № 1. S. 1.

3. Lam K. Y. // Quadratic and Hermitian Forms (Hamilton, Ont., 1983). CMS Conf., Proc. Providence, 1984. Vol. 4. P. 173.

4. Pfister A. // Arch. Math. (Basel). 1965. Bd. 16. № 1. S. 363.

5. Бондаренко А. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 4. С. 56.

6. Бондаренко А. А. // Мат. заметки. 2009. Т. 85. № 5. С. 661.

7. Серр Ж. - П. Курс арифметики. М., 1972.

8. Lam T. Y. Algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, 1973.

9. Knebusch M., Scharlau W. Algebraic Theory of Quadratic Forms. Generic methods and Pfister forms. DMV Sem. 1. Birkhäuser. Boston, 1980.

Поступила в редакцию 01.03.10.

Александр Адамович Бондаренко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры.