

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПАРАМЕТРА РАЗМЫТОСТИ
ПРИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ**

A new asymptotic formula for bandwidth calculation is proposed. Using different probability distributions this formula and well known formula which is obtained by minimization of the asymptotic mean integrated squared error are written down as functions of variance of corresponding distribution. Recommendations about practical use the above-mentioned formulas in kernel nonparametric density estimation for arbitrary random sample are given.

Пусть X_1, \dots, X_n – независимые в совокупности одинаково распределенные наблюдения со значениями в \mathbf{R} некоторой случайной величины X с неизвестной функцией распределения вероятностей $F(x)$. Пусть $F(x)$ такова, что существует плотность вероятностей $f(x)$. Непараметрической ядерной оценкой маргинальной плотности вероятностей случайной величины X называется функция переменной $x \in \mathbf{R}$

$$f_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (1)$$

где $h = h_n > 0$ – параметр размытости, $K = K(z) \in \mathbf{R}$ – ядро (ядерная функция), $z \in \mathbf{R}$ [1].

Параметр размытости определяет степень гладкости $f_h(x)$. Очень малые значения h приводят к тому, что оценка (1) оказывается негладкой, в то время как большие значения дают гладкую оценку, однако при этом могут исчезнуть присущие оцениваемой функции особенности [2]. Поэтому основной проблемой в непараметрическом ядерном оценивании является вычисление параметра размытости. Несмотря на большое количество работ по данной теме, однозначное решение пока не найдено.

Чтобы вычислить *оптимальный* параметр размытости, вначале необходимо выбрать некий критерий или расстояние между истинной плотностью вероятностей и ее непараметрической оценкой, а затем минимизировать данное расстояние по h .

Рассмотрим два критерия при $n \rightarrow \infty$, выпишем явные асимптотические формулы для вычисления параметра размытости и дадим рекомендации по использованию этих формул на практике.

Вначале рассмотрим интегральную среднеквадратичную ошибку [3]

$$MISE(h) = E \int_{-\infty}^{\infty} (f_h(x) - f(x))^2 dx. \quad (2)$$

Определим также асимптотическую интегральную среднеквадратичную ошибку

$$AMISE(h) = \frac{1}{nh} v_2(K) + 0,25\mu_2^2(K)h^4 \int_{-\infty}^{\infty} f^{n2}(y)dy, \quad (3)$$

где

$$v_2(K) = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz, \quad \mu_2(K) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 K(z) dz \neq 0. \quad (4)$$

Если предположить, что $f(x)$ и ее производные до третьего порядка включительно ограничены, ядро $K(z)$ является непрерывной функцией, причем

$$K(z) = K(-z), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |z|^r |K(z)| dz < \infty, \quad r = \overline{0,3}, \quad (5)$$

$$v_2(K) < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |z| K^2(z) dz < \infty,$$

то, используя формулу Тейлора для (2), можно показать, что при выполнении условий $h \rightarrow 0$, $hn \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место $MISE(h) = AMISE(h) + o(AMISE(h))$ [3, 4].

Минимизация функции (3) приводит к широко известной формуле для вычисления *асимптотически оптимального* параметра размытости [3]

$$h_{AMISE} = \left(v_2(K) / \left[\mu_2^2(K) \int_{-\infty}^{\infty} f^{n2}(y) dy \right] \right)^{1/5} n^{-1/5}. \quad (6)$$

Обратимся теперь к вычислению параметра размытости, используя непараметрическую оценку функции распределения вероятностей $F(x)$.

Предположим, что $f(x)$ непрерывна, а ядро K – некоторая непрерывная плотность вероятностей. Непараметрическую оценку функции $F(x)$ получим интегрированием (1):

$$F_h(x) = \int_{-\infty}^x f_h(u) du. \quad (7)$$

Рассмотрим формулу $t = F(F^{-1}(t))$, $0 < t < 1$, для строго возрастающей функции распределения вероятностей $F(x)$, где $F^{-1}(t)$ – функция, обратная $F(x)$. В качестве критерия оптимальности в задаче вычисления оптимального параметра размытости для непараметрических оценок (1) и (7) возьмем функцию [5]

$$Q(h) = E \int_0^1 (t - F_h(F^{-1}(t)))^2 dt. \quad (8)$$

Введем обозначения

$$IK(z) = \int_{-\infty}^z K(u) du \quad \text{и} \quad \gamma_i = \gamma(K) = \int_{-\infty}^{\infty} z^i IK(z) K(z) dz, \quad i = 0, 1. \quad (9)$$

Теорема. Если $h \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, выполняются условия (5), причем $K(z)$, $z \in R$, – некоторая непрерывная плотность вероятностей; существуют и ограничены производные до третьего порядка

включительно строго возрастающей функции распределения $F(x)$ (соответственно до второго порядка включительно для $f(x)$), $x \in R$, то

$$Q(h) = \frac{1}{6n} - \frac{2h\gamma_1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(y) dy + \frac{1}{4} h^4 \mu_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} f'^2(y) f(y) dy + o(h^4) + o\left(\frac{h}{n}\right). \quad (10)$$

Доказательство. Перепишем $Q(h)$ (8) как

$$Q(h) = \int_0^1 \text{Var}[t - F_h(F^{-1}(t))] dt + \int_0^1 E^2[t - F_h(F^{-1}(t))] dt$$

и вычислим каждое из слагаемых. С учетом (1), (7) и (9)

$$F_h(x) = \int_{-\infty}^x f_h(u) du = \frac{1}{nh} \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^n K\left(\frac{u - X_i}{h}\right) du = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n IK\left(\frac{x - X_i}{h}\right).$$

Используя (4), (9), замену переменных и интегрирование по частям, получим

$$E[F_h(a)] = \int_{-\infty}^{\infty} IK\left(\frac{a-z}{h}\right) f(z) dz = h \int_{-\infty}^{\infty} IK(y) f(a-yh) dy = -IK(y)F(a-yh) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} K(y)F(a-yh) dy = F(a) + \frac{1}{2} h^2 F''(a) \mu_2(K) - \frac{h^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 K(y) F'''(a-yh\theta_1) dy,$$

где для простоты через a обозначена $F^{-1}(t)$, $0 < \theta_1 < 1$. Так как $F(a) = t$, $F'(x) = f(x)$, то

$$E[F_h(a)] = t + \frac{1}{2} h^2 f'(a) \mu_2(K) - \frac{h^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 K(y) F'''(a-yh\theta_1) dy.$$

Теперь получим выражение для дисперсии:

$$\text{Var}[t - F_h(a)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}\left[IK\left(\frac{a - X_i}{h}\right)\right] = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} IK^2\left(\frac{a-x}{h}\right) f(x) dx - \frac{1}{n} E^2[F_h(a)].$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\int_{-\infty}^{\infty} IK^2\left(\frac{a-x}{h}\right) f(x) dx = 2\gamma_0 t - 2hf(a)\gamma_1 + h^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 IK(y)K(y)F''(a-yh\theta_2) dy, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Из (9) легко получить, что $\gamma_0 = 1/2$. Таким образом, $Q(h)$ (8) преобразуется к виду

$$Q(h) = \frac{1}{6n} - \frac{2h\gamma_1}{n} \int_0^1 f(F^{-1}(t)) dt + \frac{1}{4} h^4 \mu_2^2 \int_0^1 f'^2(F^{-1}(t)) dt + o(h^4) + o\left(\frac{h}{n}\right).$$

Заметим, что $\int_0^1 g(F^{-1}(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y) dy$, где $g(y)$ – некая непрерывная ограниченная функция.

Тогда легко показать, что $Q(h)$ преобразуется к виду (10). ■

Из (10) следует, что выражение

$$AQ(h) = \frac{1}{6n} - \frac{2h\gamma_1(K)}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(y) dy + \frac{1}{4} h^4 \mu_2^2(K) \int_{-\infty}^{\infty} f'^2(y) f(y) dy \quad (11)$$

можно принять за аппроксимацию функции $Q(h)$ для достаточно больших n .

Следствие. При выполнении условий теоремы функция (11) имеет минимум в точке

$$h_{AQ} = \left(\mu_2^2(K) \int_{-\infty}^{\infty} f'^2(y) f(y) dy / \left[2\gamma_1(K) \int_{-\infty}^{\infty} f^2(y) dy \right] \right)^{-1/3} n^{-1/3}. \quad (12)$$

Преимущество (12) по сравнению с (6) заключается в том, что при выводе (12) требуется существование и ограниченность производной функции $f(x)$ до второго порядка включительно, в то время как (6) предполагает ограниченность третьей производной. Это приводит к возможности употребления (12) для вычисления параметра размытости при оценивании более широкого набора плотностей вероятностей. Например, если $f(x)$ – плотность хи-квадрат распределения с m степенями свободы, то интеграл от f'^2 сходится при $m > 5$ (поэтому и h_{AMISE} можно вычислить только при $m > 5$), а интеграл от $f'^2 f$ – при $m > 8/3$.

Формулы (6) и (12) обладают очевидным недостатком – в них присутствуют неизвестные функции. Поэтому для нахождения параметров размытости h_{AQ} и h_{AMISE} необходимо сделать предположе-

ния о виде $f(x)$. В частности, иногда в (6) вместо $f(x)$ подставляют плотность нормального распределения. Тогда [1]

$$h_{AMISE} = 1,364(v_2(K) / \mu_2^2(K))^{1/5} \bar{\sigma} n^{-1/5}, \tag{13}$$

где $\bar{\sigma}$ – оценка среднеквадратического отклонения случайной величины X .

Выясним, насколько отличаются от (13) значения h_{AMISE} в случае подстановки в (6) плотностей вероятностей для распределений, отличных от нормального, и определим, какую из них следует использовать для вычисления параметра размытости при оценивании неизвестной плотности вероятностей произвольной выборки. То же самое сделаем и для h_{AQ} . Введем обозначения

$$g_{AMISE}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{n^2}(y) dy, \quad g_{AQ}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{n^2}(y) f(y) dy / \int_{-\infty}^{\infty} f^2(y) dy. \tag{14}$$

В этом случае формулы (6) и (12) примут соответственно вид

$$h_{AMISE} = (n\mu_2^2(K) / v_2(K))^{-1/5} g_{AMISE}^{-1/5}(f) \quad \text{и} \quad h_{AQ} = (n\mu_2^2(K) / (2\gamma_1(K)))^{-1/3} g_{AQ}^{-1/3}(f). \tag{15}$$

Рассмотрим поведение $g_{AMISE}(f)$ и $g_{AQ}(f)$ для следующих распределений: нормального, экспоненциального, хи-квадрат, Стьюдента, логистического, степенного, Лапласа, показательно-степенного (табл. 1) [6]. Выбор данных распределений обусловлен тем, что для них выражения (14) можно представить в виде функций от одной переменной – дисперсии соответствующего распределения. Рассматриваются только случаи конечной дисперсии. В табл. 1 значение $I(\bullet)$ равно либо 1 (при выполнении условия в скобках), либо 0 (в противном случае).

Таблица 1

Исследуемые распределения и их дисперсии

Распределение	$f(x)$	Дисперсия
Нормальное	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$	σ^2
Экспоненциальное	$\lambda e^{-\lambda x} I(x \geq 0)$	λ^{-2}
Хи-квадрат	$\frac{x^{\alpha/2-1} e^{-x/2}}{2^{\alpha/2} \Gamma(\alpha/2)} I(x > 0)$	2α
Стьюдента	$\frac{(1+x^2/\alpha)^{-(\alpha+1)/2}}{\Gamma(\alpha/2)\sqrt{\alpha\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$	$\frac{\alpha}{\alpha-2}, \alpha > 2$
Логистическое	$\frac{\pi e^{-\pi(x-m)/(\sigma\sqrt{3})}}{\sigma\sqrt{3}(1+e^{-\pi(x-m)/(\sigma\sqrt{3})})^2}$	σ^2
Степенное	$\alpha x^{-(\alpha+1)} I(x > 1)$	$\frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}, \alpha > 2$
Лапласа	$0,5e^{-\lambda x-a }$	$2\lambda^{-2}$
Показательно-степенное	$\frac{x^m e^{-x}}{\Gamma(m+1)} I(x > 0)$	$m+1$

В табл. 2 представлены значения $g_{AMISE}(f)$ и $g_{AQ}(f)$ для рассмотренных распределений. В случае необходимости указываются дополнительные ограничения на параметры, при выполнении которых интегралы в (14) сходятся.

Таблица 2

Значение выражений (14) для исследуемых распределений

Распределение	$g_{AMISE}(f)$	$g_{AQ}(f)$
Нормальное	$3(8\sigma^5\sqrt{\pi})^{-1}$	$(3\sqrt{3}\pi\sigma^3)^{-1}$
Экспоненциальное	$\lambda^5 / 2$	$2\lambda^3 / 3$
Хи-квадрат	$\frac{3\Gamma(\alpha/2 - 5/2)}{256\Gamma(\alpha/2)\sqrt{\pi}}, \alpha > 5$	$\frac{2^{\alpha-4}\Gamma(3\alpha/2 - 4)}{3^{3\alpha/2-3}\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\alpha/2 - 1)}, \alpha > \frac{8}{3}$
Стьюдента	$\frac{3\Gamma^2(\alpha/2 + 5/2)\Gamma(\alpha + 5/2)}{\Gamma^2(\alpha/2 + 1)\Gamma(\alpha + 5)\sqrt{\pi\alpha}}$	$\frac{2^{\alpha}\Gamma^2((3+\alpha)/2)\Gamma(2+3\alpha/2)}{\pi\sqrt{\alpha}\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma((7+3\alpha)/2)}$
Логистическое	$\pi^5 / (378\sigma^5\sqrt{3})$	$\pi^3 / (105\sigma^3\sqrt{3})$
Степенное	$\frac{\alpha^2(\alpha+1)^2(\alpha+2)^2}{2\alpha+5}$	$\frac{\alpha(2\alpha+1)(\alpha+1)^2}{3\alpha+4}$
Лапласа	$\lambda^5 / 4$	$\lambda^3 / 3$
Показательно-степенное	$\frac{3m(m-1)\Gamma(2m-3)}{2^{2m-1}\Gamma^2(m+1)}, m > \frac{3}{2}$	$\frac{2^{2m+1}\Gamma(3m-1)}{3^{3m}\Gamma(m)\Gamma(2m+1)}, m > \frac{1}{3}$

Как следует из полученных выражений, значения (14) для каждого из рассмотренных распределений зависят только от одного параметра, который можно записать через дисперсию D соответствующего распределения. В большинстве случаев представление параметра в виде функции от D не составляет труда. Поэтому подробно проанализируем только наиболее сложные ситуации.

Итак, для распределения Стьюдента $D = \alpha / (\alpha - 2)$, $\alpha > 2$. Тогда

$$\alpha = 2 + \frac{2}{D-1}, \quad D > 1. \tag{16}$$

Для степенного распределения имеем $D = \alpha / ((\alpha - 1)(\alpha - 2))$, $\alpha > 2$. Отсюда следует $D\alpha^2 - (3D + 1)\alpha + 2D = 0$. Дискриминант данного уравнения равен $D^2 + 6D + 1$. Это выражение для положительных D всегда больше нуля. Поэтому квадратное уравнение имеет два корня. Условию $\alpha > 2$ удовлетворяет $\alpha = (3D + 1 + \sqrt{D^2 + 6D + 1}) / (2D)$.

Таким образом, (14) представимы в виде функций от дисперсии D для каждого из распределений табл. 1. Пользуясь выражениями из табл. 1, 2 и (16), запишем область определения данных функций, которые обозначим соответственно $[g_{AMISE}(f)](D)$ и $[g_{AQ}(f)](D)$. Для распределений нормального, экспоненциального, логистического, степенного и Лапласа $[g_{AMISE}(f)](D)$ и $[g_{AQ}(f)](D)$ определены для $D > 0$, для распределения Стьюдента – для $D > 1$. Для распределения хи-квадрат $[g_{AMISE}(f)](D)$ определена для $D > 10$, $[g_{AQ}(f)](D)$ – для $D > 16/3$. Наконец, для показательно-степенного распределения $[g_{AMISE}(f)](D)$ определена для $D > 5/2$, $[g_{AQ}(f)](D)$ – для $D > 4/3$.

Из полученных результатов следует, что $[g_{AQ}(f)](D)$ определена на интервале не меньше, чем интервал для $[g_{AMISE}(f)](D)$, что дает возможность использования $[g_{AQ}(f)](D)$ для таких D , при которых $[g_{AMISE}(f)](D)$ может быть не определена.

С помощью численных методов установлено, что $[g_{AMISE}(f)]^{-1/5}(D)$ и $[g_{AQ}(f)]^{-1/3}(D)$ для распределений из табл. 1 с ростом D возрастают, за исключением $[g_{AMISE}(f)]^{-1/5}(D)$ для распределения Стьюдента, которая возрастает до $D \approx 1,4981$, а затем убывает.

Функции $[g_{AMISE}(f)]^{-1/5}(D)$ и $[g_{AQ}(f)]^{-1/3}(D)$ изображены на рис. 1. По расположению графиков значения функции $[g_{AMISE}(f)]^{-1/5}(D)$ можно разделить на две группы – «верхняя» (распределения нормальное, экспоненциальное, хи-квадрат, логистическое, показательно-степенное, Лапласа) и «нижняя» (распределения Стьюдента и степенное). Для $[g_{AQ}(f)]^{-1/3}(D)$ выделяется и «средняя» группа (распределения экспоненциальное и Лапласа). Выше остальных находится график нормального распределения, ниже – степенного. Соответственно в первом случае согласно (15) параметр размытости будет наибольшим (оценка плотности самая гладкая), а во втором – наименьшим (наименее гладкая оценка).

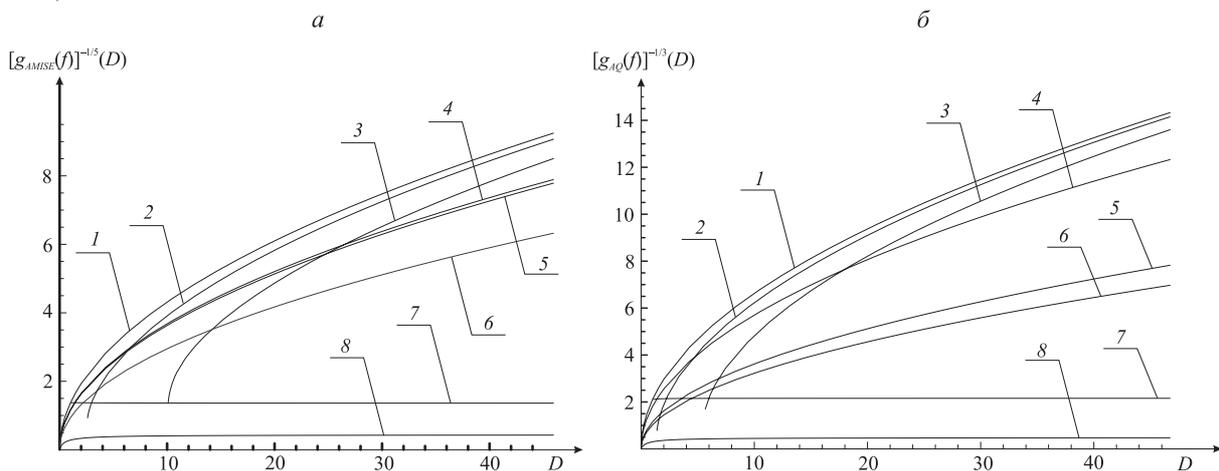


Рис. 1. Зависимость $[g_{AMISE}(f)]^{-1/5}(D)$ (а) и $[g_{AQ}(f)]^{-1/3}(D)$ (б) от D .
 Распределения: 1 – нормальное, 2 – показательно-степенное, 3 – хи-квадрат, 4 – логистическое, 5 – экспоненциальное, 6 – Лапласа, 7 – Стьюдента, 8 – степенное

Так как при фиксированном D различия между $[g_{AMISE}(f)]^{-1/5}(D)$ для распределений табл. 1 существенны (аналогично для $[g_{AQ}(f)]^{-1/3}(D)$), то при оценивании неизвестной плотности вероятностей произвольной выборки в (12) следует подставлять $g_{AQ}(f)$ для распределений из «средней» группы, а в (6) – распределение Лапласа, так как оно находится ниже остальных в «верхней» группе. Этим дости-

гается приемлемое качество оценивания для распределений из любой группы, т. е. полученный параметр размытости не будет ни слишком малым, ни слишком большим. Исходя из сказанного, подставим в (15) $[g_{AMISE}(f)]^{-1/5}(D)$ и $[g_{AQ}(f)]^{-1/3}(D)$ для распределения Лапласа. Получим

$$h_{AMISE}^L = \left(\frac{n\mu_2^2(K)}{v_2(K)} \right)^{-1/5} \frac{\sqrt{D}}{2^{1/10}} \text{ и } h_{AQ}^L = 3^{1/3} \left(\frac{n\mu_2^2(K)}{2\gamma_1(K)} \right)^{-1/3} \sqrt{\frac{D}{2}}. \quad (17)$$

Введем также обозначения h_{AMISE}^N, h_{AQ}^N соответственно h_{AMISE} и h_{AQ} – для нормального распределения, h_{AMISE}^P, h_{AQ}^P соответственно h_{AMISE} и h_{AQ} – для степенного распределения. Выясним, насколько различаются h_{AMISE}^N и h_{AMISE}^L, h_{AMISE}^P и h_{AMISE}^L, h_{AQ}^N и h_{AQ}^L, h_{AQ}^P и h_{AQ}^L .

Воспользовавшись (15), (17) и данными табл. 1, 2, получаем

$$\frac{h_{AMISE}^L}{h_{AMISE}^P} = \left(\frac{(2\alpha + 5)\lambda^5}{(2\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2))^2} \right)^{-1/5}, \quad \frac{h_{AQ}^L}{h_{AQ}^P} = \left(\frac{(3\alpha + 4)\lambda^3}{3\alpha(2\alpha + 1)(\alpha + 1)^2} \right)^{-1/3}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2}{D}},$$

$$\alpha = \frac{3D + 1 + \sqrt{D^2 + 6D + 1}}{2D}, \quad \frac{h_{AMISE}^N}{h_{AMISE}^L} = \left(\frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \right)^{-1/5} \approx 1,4622, \quad \frac{h_{AQ}^N}{h_{AQ}^L} = \left(\frac{1}{2\sqrt{6\pi}} \right)^{-1/3} \approx 2,0554.$$

Значения $h_{AMISE}^L / h_{AMISE}^P$ и h_{AQ}^L / h_{AQ}^P для различных D представлены на рис. 2. Ввиду их незначительного отклонения друг от друга приведем также график относительного отклонения $\varepsilon(D) = \frac{h_{AMISE}^L / h_{AMISE}^P - h_{AQ}^L / h_{AQ}^P}{h_{AMISE}^L / h_{AMISE}^P}$ (рис. 3).

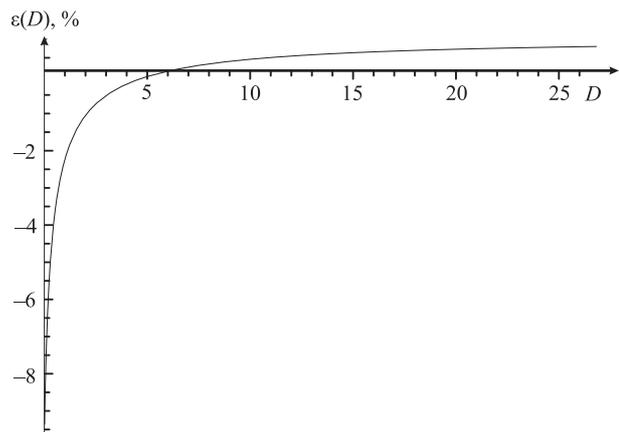
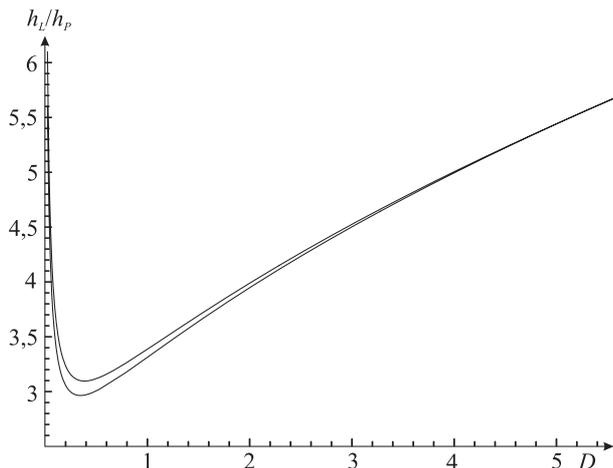


Рис. 2. 1 – функция $[h_{AMISE}^L / h_{AMISE}^P](D)$, 2 – функция $[h_{AQ}^L / h_{AQ}^P](D)$ Рис. 3. График относительного отклонения $\varepsilon(D) \times 100\%$

Из полученных результатов следует, что для (6) отличие между h^N и h^L меньше, чем для (12). Отличие между h^P и h^L для обеих формул практически одинаково. Наибольшее значение относительного отклонения $\varepsilon(0) = 1 - 2^{2/15}$ (или приблизительно $-9,68\%$).

Таким образом, в работе получена новая асимптотическая формула (12) для вычисления параметра размытости. Преимущество данной формулы в том, что в нее входит производная неизвестной плотности вероятностей $f(x)$ порядка меньше, чем в (6). Для набора плотностей вероятностей восьми распределений выражения (6) и (12) представлены в виде функций от дисперсий соответствующих распределений. При их анализе установлено, что при непараметрическом оценивании неизвестной плотности вероятностей произвольной выборки целесообразно применять (6) и (12) соответственно в виде (17), где используется плотность распределения Лапласа. Найдены границы максимального отклонения (17) от наибольшего и наименьшего параметров размытости (по крайней мере для рассмотренных распределений). Данные границы приблизительно одинаковы для обеих формул (17).

1. Silverman B. W. Density estimation for statistics and data analysis. London, 1986.
2. Heiler S. A Survey on Nonparametric Time Series Analysis. Discussion paper. Konstanz, 1999.
3. Turlach B. A. Bandwidth selection in kernel density estimation: a review. Technical report. Louvain-la-Neuve, 1993.
4. Епанечников В. А. // Теория вероятностей и ее применение. 1969. Т. 14. № 1. С. 156.

5. Rafajłowicz E. New approach to bandwidth choice in nonparametric density estimation. Scientific Literature Digital Library [Electronic resource]. 2002.

6. Корольюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М., 1985.

Поступила в редакцию 29.03.10.

Евгений Григорьевич Красногир – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики.