УДК 517.955

Член-корреспондент НАН Беларуси В. И. Корзюк, И. С. Козловская

Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных

В данной статье дается в аналитическом виде решение задачи Коши для гиперболического уравнения порядка m с постоянными коэффициентами, где m – целое положительное число, оператор уравнения представляет собой композицию дифференциальных операторов первого порядка в случае двух независимых переменных.

Построение решения названной задачи Коши проводится методом характеристик. Одним из первых результатов метода характеристик является формула Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения колебания струны [1, стр.294], [2, стр. 54-56]. Методом характеристик находится общее решение и решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка [3, стр. 539-554], [4, стр. 306-343].

Этим методом найдены решения задачи Коши для многих других дифференциальных уравнений, в том числе и нелинейных. Это уравнения Гамильтона-Якоби, квазилинейные уравнения первого порядка и другие [5].

Результаты этой статьи в последующих работах будут использованы для решения смешанных задач для рассматриваемого здесь гиперболического уравнения.

Задаче Коши для гиперболических уравнений с частными производными посвящена многочисленная литература, где исследования проводятся другими методами. Но они не позволяют построить решения в аналитическом виде, а только доказать корректную постановку задачи [6-15]. Отметим еще работу [16], где общие решения в аналитическом виде для дифференциальных уравнений с частными производными и решения задачи Коши строятся с помощью систем компьютерной алгебры.

1. На плоскости $\mathbf{R}^2$ двух действительных независимых переменных t и x рассмотрим полуплоскость $Q = \ 0,\infty\ \times \mathbf{R}$. Для сокращенной записи введем обозначения частных производных: $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t^j = \dfrac{\partial^j}{\partial t^j}$, $\partial_x^j = \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}$, $\partial_t^s \partial_x^j = \dfrac{\partial^{s+j}}{\partial t^s \partial x^j}$. В области Q рассмотрим относительно искомой функции $u : \mathbf{R}^2 \supset Q \ni\ t,x\ \to u\ t,x\ \in \mathbf{R}$ гиперболическое дифференциальное уравнение порядка m

$$\mathcal{L}^{(m)} u = \prod_{k=1}^{m} \left(\partial_t - a^{(k)} \partial_x \right) u\ \ t,x\ = f\ \ t,x\ , \quad\ t,x\ \in Q, \tag{1}$$

где $a^{(k)}$ − заданные из $\mathbf{R}$ числа, $f : \overline{Q} \ni\ t,x\ = f\ t,x\ \in \mathbf{R}$ – заданная на Q функция, $\overline{Q}$ – замыкание области Q и $\overline{Q} = \ 0,\infty\ \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ − множество действительных чисел, $\ 0,\infty\ = \overline{\ 0,\infty\ } = \ 0,\infty\ \cup\ 0\ $, $\cup$ – обозначение объединения, $\ 0\ $ – одноточечное множество, элементом которого является 0. . На границе $\partial Q = \ \ t,x\ \in \overline{Q} \mid t = 0\ $ области Q задаются условия Коши

$$\partial_t^j u\big|_{t=0} = d^j \varphi^{(j)}(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad j = 0,1,\ldots,m-1, \tag{2}$$

$\partial_t^0 u = u$, $d^j = d^j / dx^j$.

2. Рассмотрим однородное уравнение (1), т. е. уравнение

$$\mathcal{L}^{(m)}u = 0, \quad (t, x) \in Q, \tag{3}$$

Обозначим через $C^m(\mathbf{R})$ множество непрерывно дифференцируемых до порядка m функций.

Теорема 1. Общее решение уравнения (3) представляет собой сумму

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{m} g^{(k)}\left(x + a^{(k)}t + C^{(k)}\right) \tag{4}$$

m функций $g^{(k)} \in C^m(\mathbf{R})$, где $\mathcal{L}^{(m)}$ – гиперболический оператор вида (1) с действительными постоянными числами $a^{(k)} \neq a^{(j)}$, $k \neq j$, $k, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Доказательство. Введем обозначение $w(t, x) = \mathcal{L}^{m-1}u(t, x) = \prod_{k=1}^{m-1}\left(\partial_t - a^{(k)}\partial_x\right)u(t, x)$. Имеем уравнение первого порядка

$$\partial_t w - a^{(m)}\partial_x w = 0. \tag{5}$$

Уравнение характеристик уравнения (5) есть уравнение

$$dx + a^{(m)}dt = 0,$$

общее решение которого есть $x + a^{(m)}t + C^{(m)} = 0$, где $C^{(m)}$ – произвольная постоянная. Делаем замену независимых переменных

$$\begin{aligned} \xi &= x + a^{(m)}t + C^{(m)}, \\ \eta &= t. \end{aligned} \tag{6}$$

В силу замены (6) уравнение (5) относительно функции $v(\xi, \eta) = w(t, x)$ запишется в виде $\partial_\eta v = 0$. Отсюда общее решение этого уравнения есть $v(\xi, \eta) = g^{(m)}(\xi)$, или $w = g^{(m)}\left(x + a^{(m)}t + C^{(m)}\right)$, где $g^{(m)}$ – произвольная дифференцируемая функция.

Продолжая таким образом интегрирование уравнения (3) дальше, получим общее его решение в виде (4).

3. Рассмотрим теперь задачу Коши (3), (2). Удовлетворяя решение (4) уравнения (3) условиям Коши, получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}\left(a^{(k)}\right)^j d^j g^{(k)}\left(x + C^{(k)}\right) = d^j \varphi^{(j)}(x), \quad j = 0, \ldots, m-1. \tag{7}$$

Интегрируем уравнения (7) для $j = 1, \ldots, m-1$. В результате получим алгебраическую систему

$$\sum_{k=1}^{m} g^{(k)}\left(x + C^{(k)}\right) = \varphi^{(0)}(x) + \mathcal{P}^{(0)}, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left(a^{(k)}\right)^{j} g^{(k)}\left(x+C^{(k)}\right)=\varphi^{(j)}(x)+\mathcal{P}^{(j)}\left(x,C^{(j,s)}\right), \quad j=1,\ldots,m-1.$$

$0!=1$, $\mathcal{P}^{(j)}\left(x,C^{(j,s)}\right)=\sum_{s=0}^{j-1}\frac{1}{s!}x^{s}C^{(j,s)}$, $\mathcal{P}^{(0)}=0$. Определитель левой части системы (8) представляет собой определитель Вандермонда [17, стр. 50] и

$$\|A\|=\prod_{1\le j<i\le m}(a^{(i)}-a^{(j)}). \tag{9}$$

Поскольку уравнение (1) является строго гиперболическим, то $\|A\|\neq 0$. Следовательно, система (8) имеет единственное решение, и определяется оно по правилу Крамера, т. е.

$$g^{(k)}\left(x+C^{(k)}\right)=\frac{1}{\|A\|}\left\|A^{(k)}\left(\boldsymbol{\varphi}(x)+\boldsymbol{C}(x)\right)\right\|,$$

где

$$\left\|A^{(k)}\left(\boldsymbol{\varphi}(x)+\boldsymbol{C}(x)\right)\right\|=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \varphi^{(0)}(x) & 1 & \ldots & 1 \\ a^{(1)} & \ldots & a^{(k-1)} & \varphi^{(1)}(x)+C^{(0,0)} & a^{(k+1)} & \ldots & a^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a^{(1)})^{m-1} & \ldots & (a^{(k-1)})^{m-1} & \varphi^{(m-1)}(x)+\mathcal{P}^{(m-1)}\left(x,C^{(m-1,s)}\right) & (a^{(k+1)})^{m-1} & \ldots & (a^{(m)})^{m-1} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

В (10) k-тый столбец $\boldsymbol{\varphi}(x)+\boldsymbol{C}(x)=\left(\varphi^{(0)}(x),\varphi^{(1)}(x)+C^{(0,0)},\ldots,\right.$ $\left.\varphi^{(m-1)}(x)+\mathcal{P}^{(m-1)}\left(x,C^{(m-1)}\right)\right)$ рассматриваем как сумму двух столбцов $\boldsymbol{\varphi}(x)=\left(\varphi^{(0)}(x),\ldots,\varphi^{(m-1)}(x)\right)$ и $\boldsymbol{C}(x)=\left(0,C^{(0,0)},C^{(1,0)}+xC^{(1,1)},\ldots,\mathcal{P}^{(m-1)}\left(x,C^{(m-1,s)}\right)\right)$. Тогда

$$\left\|A^{(k)}\left(\boldsymbol{\varphi}(x)+\boldsymbol{C}(x)\right)\right\|=\left\|A^{(k)}\left(\boldsymbol{\varphi}(x)\right)\right\|+\left\|A^{(k)}\left(\boldsymbol{C}(x)\right)\right\|. \tag{11}$$

Согласно (4) и (11) решение задачи (3), (2) запишется через определители Вандермонда и типа Вандермонда в виде суммы

$$u(t,x)=\frac{1}{\|A\|}\sum_{k=1}^{m}\left\|A^{(k)}\boldsymbol{\varphi}\left(x+a^{(k)}t\right)\right\|+\frac{1}{\|A\|}\sum_{k=1}^{m}\left\|A^{(k)}\boldsymbol{C}\left(x+a^{(k)}t\right)\right\|. \tag{12}$$

Рассмотрим сумму определителей, которые представляют собой измененный определитель Вандермонда $\|A\|$. Здесь в $\|A\|$ изменен k–ый столбец $\left(1,a^{(k)},\ldots,\left(a^{(k)}\right)^{m}\right)$ на столбец, который состоит из нулей и элемента $(a^{(k)})^{s}$, который находится на пересечении k – го столбца с $j+1$ – ой строкой, т. е.

$$\left\| B^{j+1,k}\left(a^{k}\right)^{s} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(a^{(1)}\right)^{j} & \dots & \left(a^{(k-1)}\right)^{j} & 0 & \left(a^{(k+1)}\right)^{j} & \dots & \left(a^{(m)}\right)^{j} \\ \left(a^{(1)}\right)^{j+1} & \dots & \left(a^{(k-1)}\right)^{j+1} & \left(a^{k}\right)^{s} & \left(a^{(k+1)}\right)^{j+1} & \dots & \left(a^{(m)}\right)^{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(a^{(1)}\right)^{m-1} & \dots & \left(a^{(k-1)}\right)^{m-1} & 0 & \left(a^{(k+1)}\right)^{m-1} & \dots & \left(a^{(m)}\right)^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Справедливо следующее утверждение

Лемма 1. Для любых различных действительных значений $a^{(k)}$, $k=1,\dots,m$, ($a^{(r)} \neq a^{(p)}$, $r \neq p$, $r,p = 1,\dots,m$)

$$\sum_{k=1}^{m} \left\| B^{(j+1;k)}\left(a^{(k)}\right)^{s} \right\| = 0$$

для $s = 0,\dots,j-1$.

Доказательство проводится путем разложения каждого определителя $\left\| B^{(j+1;k)}\left(a^{(k)}\right)^{s} \right\|$ по k – тому столбцу, используя дополнительные миноры.

Теорема 2. Если функции $\varphi^{(k)} \in C^{k}(\mathbf{R})$, $k=0,\dots m-1$, уравнение (3) является строго гиперболическим, то существует единственное решение u из класса $C^{m}(\overline{Q})$ задачи (3), (2) и определяется формулой

$$u(t,x) = \frac{1}{\|A\|} \sum_{k=1}^{m} \left\| A^{k} \boldsymbol{\varphi}\left(x + a^{k} t\right) \right\|, \tag{13}$$

где $C^{m}(\overline{Q})$ – множество непрерывных и непрерывно дифференцируемых по t и x до порядка m включительно функций в замыкании $\overline{Q}$ области Q.

Доказательство. Утверждение теоремы 2 является фактически итогом предыдущих рассуждений. В силу леммы 1 $\sum_{k=1}^{m} \left\| A^{k} \boldsymbol{C}\left(x + a^{k} t\right) \right\| = 0$. Отсюда и из формулы (12) следует формула(13), которая дает решение задачи (3), (2).

4. Рассмотрим теперь задачу (1) – (2). Поскольку она является линейной, то ее решение u можно представить в виде суммы двух решений

$$u(t,x) = u^{0}(t,x) + u^{1}(t,x), \tag{14}$$

где u^{0} − решение задачи (3), (2) и определяется формулой (13). Тогда u^{1} − решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее однородным условиям Коши

$$\left.\partial_{t}^{j} u^{1}\right|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad j = 0,\dots,m-1. \tag{15}$$

Для отыскания решения задачи (1), (15) воспользуемся результатами решения задачи (3), (2). Пусть $w(t,\tau,x)$ − решение задачи Коши:

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\partial_t - a^k \partial_x\right) w(t,\tau,x) = 0,$$

$$\partial_t^j w(t,\tau,x)\Big|_{t=0} = 0, \quad j = 0,\ldots,m-2, \tag{16}$$

$$\partial_t^{m-1} w(t,\tau,x)\Big|_{x=0} = f(\tau,x).$$

Введем обозначения: $\varphi^{(m)}(\tau,x) = \dfrac{1}{(m-2)!}\displaystyle\int_0^x (x-z)^{m-2} f(\tau,z)\,dz$, $\boldsymbol{\varphi}(\tau,x) =$ $= \left(0,\ldots,0,\varphi^{(m)}(\tau,x)\right)$. Через эти функции и формулу (13) будет определяться решение $w(t,\tau,x)$ задачи (16). Если сделать вычисления, получим функцию $w(t,\tau,x)$, определяемую формулой

$$w(t,\tau,x) = \sum_{k=1}^{m} \varphi^{(m)}\left(\tau, x + a^k t\right) \frac{1}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{m}\left(a^k - a^i\right)}. \tag{17}$$

Функция $u^{(1)}$, представленная через $w(t,\tau,x)$ по формуле

$$u^{(1)}(t,x) = \int_0^t w(t-\tau,\tau,x)\,d\tau, \tag{18}$$

будет решением задачи (1), (15). Это легко проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (1) и условия (15), используя при этом лемму 1 и то, что w является решением задачи (16).

Объединяя формулы (17) и (18), получим формулу для функции $u^{(1)}$

$$u^{(1)}(t,x) = \frac{1}{(m-2)!}\int_0^t \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{m}\left(a^k - a^i\right)} \int_0^{x+a^k(t-\tau)} \left(x + a^k(t-\tau) - z\right)^{m-2} f(\tau,z)\,dz\,d\tau. \tag{19}$$

Обозначим через $C^1(\bar{Q})$ множество непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $\bar{Q}$.

Теорема 3. Если уравнение (1) является строго гиперболическим, функции $\varphi^{(k)}$, $k = 0,\ldots,m-1$ условий (2) из класса $C^k(\mathbf{R})$, $f \in C^1(\bar{Q})$, то существует единственное решение u из класса $C^m(\bar{Q})$ задачи Коши (1), (2), которое определяется через аналитические выражения с помощью формул (14), (13), (19).

Литература

1. Emmanuele Di Benedetto / Partial Differential Equations. Dirkhauser. Djston·Basel·Berlin, − 1995. − 416 p.
2. Тихонов, А.Н. / Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М.: Наука, − 2004. − 798 с.
3. Матвеев, Н. М. / Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев − М.: Изд-во «Высшая школа». − 1967. − 564 с.
4. Еругин, Н. П. / Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин − Минск: Изд-во «Наука и техника». − 1972. − 664 с.
5. Tran, Duc Van / The characteristic method and its generalizations for first-order nonlinear partial differential equations / Tran Duc Van, Mikio Tsuji, Nguen Duy Thai Son. − CHAPMAN & HALL/CRC. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics; 101. Boca Raton·London·New York·Washington, D.C.− 2000. − 237 p.
6. Гординг, Л. Задача Коши для гиперболических уравнений / Гординг Л. – М: Иностран. лит., − 1961. –124 с.
7. Петровский, И. Г. Uber das Cauchysche Problem fur System von partiellen Differential gleichungen // Математ. сб. – 1937. № 2(44). – С. 815-870.
8. Петровский, И. Г. Sur l’analyticite des solutions des systemes d’equations differentielles // Математ. сб. – 1939. № 5(47). – С. 152-166.
9. Ройтберг, Я. А. Задача Коши, граничные и смешанные задачи для общих гиперболических систем в полной шкале пространств типа соболевских // Нелинейн. граничн. задачи. – 1990. № 2. – С. 93-98.
10. Ройтберг, Я. А. Задача Коши для общих гиперболических систем в полной шкале пространств типа соболевских // ДАН СССР. – 1991. – Т. 316, № 2. – С. 300-304.
11. Ройтберг Я. А. Граничные и смешанные задачи для общих гиперболических систем в полной шкале пространств типа соболевских // ДАН СССР. – 1991. − Т. 318, № 4. – С. 820-824.
12. Leray, J. Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients. / Prinston, Just for Adv. Study. – 1952. – 216 p.
13. Leray, J. Hyperbolic differential equations. / New York. The Institute for Advaced Study. – 1955. – 238 p. (Рус. пер: Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. – М: Наука, 1984. – 207 с.)
14. Torchinsky, A. The Fourier transform and the wave equation. arXiv: 0904.3252v1 [math.AP] 21 Apr 2009.
15. Мамадалиев, Н. К. О представлении решения видоизмененной задачи Коши // Сибирский математический журнал. –2000. –Т. 41. – № 5. – С. 1087–1097.
16. Kragler, R. The Method of Inverse Differential Operators Applied for the Solution of PDEs // Gadomski L., Jakubiak M., Prokopenya A.N. (Eds.) Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics. Siedlce. – 2011. – P. 79-95.
17. Курош, А. Г. / Курс высшей алгебры / Курош А. Г. − М: Изд-во "Наука". − 1965. − 432 с.