УДК 517.956.32

В.И. Корзюк, И.С. Козловская, Ю.В. Шейко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

Метод характеристик, предложенный в [1,2], позволяет найти решения начально-краевых задач в явном аналитическом виде. Основная идея метода состоит в разбиении исходной области на подобласти и решении своей начально-краевой задачи в каждой подобласти [1-3]. Как правило, в некоторых из подобластей возникает задача Коши.

В данной работе рассматривается задача Коши для телеграфного уравнения. В работе получено общее решение телеграфного уравнения, а также решение задачи Коши для однородного и неоднородного телеграфного уравнения. Для нахождения решения неоднородного уравнения использовался метод Дюамеля. В дальнейшем полученные решения будут использованы для решения смешанных задач для телеграфного уравнения методом характеристик.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}-a_1\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}-a_2 v(t,x)=0,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}, \qquad (1)$$

$$v\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi(x),\ x\in\mathbb{R}, \qquad (2)$$

где $\varphi(x)\in C^2(\mathbb{R})$, $\chi(x)\in C^1(\mathbb{R})$ и найдем ее решение, $C^k(\mathbb{R})$ – множество непрерывных и непрерывно дифференцируемых до порядка k функций, заданных на $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ – множество действительных функций.

Введем вместо функции $v(t,x)$ новую функцию $u(t,x)$ по формуле

$$v(t,x)=e^{-\gamma t}u(t,x), \qquad (3)$$

где γ – некоторое произвольное число.

Подставляя выражение (3) в уравнение (1) и производя преобразования, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(a_1+2\gamma)\frac{\partial u}{\partial t}-(a_2-a_1\gamma-\gamma^2)u=0.$$

Полагая $\gamma=-\frac{a_1}{2}$ и вводя обозначение $c=a_2-\frac{3a_1}{4}$, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}-cu(t,x)=0,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

С учетом выражения (3) начальные условия (2) примут вид

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

где $\psi(x)=\chi(x)+\frac{a_1}{2}\varphi(x)$, $\psi(x)\in C^1(\mathbb{R})$.

Таким образом, от задачи Коши (1) – (2) переходим к задаче Коши (4) – (5).

Решение задачи Коши (4) – (5) приведено в [4, с. 583]. При этом сам процесс решения осуществляется посредством неочевидного перехода к вспомогательной задаче Коши для двумерного уравнения колебаний. В [5, с. 265] решение задачи Коши (4) – (5) находится с помощью интегрального преобразования Фурье. В [6, с.84] решается первая смешанная задача для уравнения (4) с помощью функции Грина.

В данной работе предлагается нахождение классического решения задачи Коши (4) – (5) из общего решения телеграфного уравнения. В свою очередь общее решение телеграфного уравнения находится методом последовательных приближений. Такой подход позволит в дальнейшем решать смешанные задачи для телеграфного уравнения методом характеристик как в цилиндрических, так и в криволинейных областях.

2. Общее решение однородного телеграфного уравнения

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}-cu(t,x)=0,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

где $\varphi(x)\in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x)\in C^1(\mathbb{R})$ и найдем ее решение.

Прежде всего найдем решение уравнения (6). С помощью замены $\xi=x+at$, $\eta=x-at$ уравнение (6) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}-\tilde{c}u(\xi,\eta)=0, \tag{8}$$

где $\tilde{c}=-\frac{c}{4a^2}$.

Интегрируя уравнение (8) по переменным ξ и η, получим

$$u(\xi,\eta)=\tilde{c}\int_0^{\eta}\int_0^{\xi}u(y,z)\,dydz+f(\eta)+g(\xi), \tag{9}$$

где $f(\eta)$, $g(\xi)$ – произвольные функции.

Решаем уравнение (9) методом последовательных приближений. Пусть $u^0(\xi,\eta)=f(\eta)+g(\xi)$, тогда

$$u^1(\xi,\eta)=\tilde{c}\xi\int_0^{\eta}f(z)\,dz+\tilde{c}\eta\int_0^{\xi}g(y)\,dy+f(\eta)+g(\xi),$$

$$u^2(\xi,\eta)=\tilde{c}^2\frac{\xi^2}{2!}\int_0^{\eta}d\eta_1\int_0^{\eta_1}f(z)\,dz+\tilde{c}^2\frac{\eta^2}{2!}\int_0^{\xi}d\xi_1\int_0^{\xi_1}g(y)\,dy+$$

$$+\tilde{c}\xi\int_0^{\eta}f(z)\,dz+\tilde{c}\eta\int_0^{\xi}g(y)\,dy+f(\eta)+g(\xi).$$

Продолжая аналогичные итерации дальше, в результате получим для любого номера n

$$u^n(\xi,\eta)=\tilde{c}^n\frac{\xi^n}{n!}\int_0^{\eta}d\eta_{n-1}\int_0^{\eta_{n-1}}\ldots d\eta_1\int_0^{\eta_1}f(z)\,dz+\tilde{c}^n\frac{\eta^n}{n!}\int_0^{\xi}d\xi_{n-1}\int_0^{\xi_{n-1}}\ldots d\xi_1\int_0^{\xi_1}g(y)\,dy+\ldots+$$

$$+\tilde{c}\frac{\xi}{1!}\int_0^{\eta}f(z)\,dz+\tilde{c}\frac{\eta}{1!}\int_0^{\xi}g(y)\,dy+f(\eta)+g(\xi)=$$

$$=f(\eta)+g(\xi)+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\tilde{c}^k\xi^k}{k!}\int_0^{\eta}\frac{(\eta-z)^{k-1}}{(k-1)!}f(z)\,dz+\frac{\tilde{c}^k\eta^k}{k!}\int_0^{\xi}\frac{(\xi-y)^{k-1}}{(k-1)!}g(y)\,dy\right].$$

Переходим к пределу при $n\to\infty$, получим решение уравнения (9) в виде

$$u(\xi,\eta)=f(\eta)+g(\xi)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\tilde{c}^k\xi^k}{k!}\int_0^{\eta}\frac{(\eta-z)^{k-1}}{(k-1)!}f(z)\,dz+\frac{\tilde{c}^k\eta^k}{k!}\int_0^{\xi}\frac{(\xi-y)^{k-1}}{(k-1)!}g(y)\,dy\right].$$

Возвращаясь к независимым переменным x, t, решение уравнения (6) представим в виде

$$u(t,x)=f(x-at)+g(x+at)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\tilde{c}^k(x+at)^k}{k!}\int_0^{x-at}\frac{(x-at-z)^{k-1}}{(k-1)!}f(z)\,dz+\right.$$

$$\left.+\frac{\tilde{c}^k(x-at)^k}{k!}\int_0^{x+at}\frac{(x+at-y)^{k-1}}{(k-1)!}g(y)\,dy\right]. \tag{10}$$

3. Решение задачи Коши для однородного телеграфного уравнения

Найдем теперь решение задачи Коши (6) – (7). Для этого решение (10) уравнения (6) подставим в начальные условия (7) и определим неизвестные функции $f(\eta)$, $g(\xi)$. Из первого начального условия получаем

$$u\big|_{t=0} = f(x) + g(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\tilde{c}^k x^k}{k!}\int_0^x \frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!} f(z)\,dz + \frac{\tilde{c}^k x^k}{k!}\int_0^x \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} g(y)\,dy\right] = \varphi(x). \quad (11)$$

Подставляя решение (10) во второе начальное условие, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) - a\tilde{c}xf(x) + a\tilde{c}xg(x) + \\ +a\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\tilde{c}^k x^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^x \frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!} f(z)\,dz - \frac{\tilde{c}^k x^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^x \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} g(y)\,dy\right] - \\ +a\sum_{k=2}^{\infty}\left[-\frac{\tilde{c}^k x^k}{k!}\int_0^x \frac{(x-z)^{k-2}}{(k-2)!} f(z)\,dz + \frac{\tilde{c}^k x^k}{k!}\int_0^x \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} g(y)\,dy\right] = \psi(x).\end{gathered} \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) перепишем в виде

$$\begin{gathered}(f+g)(x) + \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}^k x^k (x-y)^{k-1}}{k!\,(k-1)!}(f+g)(y)\,dy = \varphi(x), \\ (g'-f')(x) + \tilde{c}x(g-f)(x) + \\ +\int_0^x\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tilde{c}^k x^k (x-y)^{k-2}}{k!\,(k-2)!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}^k x^{k-1}(x-y)^{k-1}}{((k-1)!)^2}\right\}(g-f)(y)\,dy = \frac{1}{a}\psi(x).\end{gathered} \quad (13)$$

Уравнение (13) проинтегрируем в пределах от 0 до x, в результате получим

$$\begin{gathered}(g-f)(x) + \int_0^x\left\{\tilde{c}y + \int_y^x \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tilde{c}^k z^k (z-y)^{k-2}}{k!\,(k-2)!}\,dz - \right. \\ \left. -\int_y^x \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}^k z^{k-1}(z-y)^{k-1}}{((k-1)!)^2}\,dz\right\}(g-f)(y)\,dy = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(y)\,dy + C.\end{gathered}$$

Таким образом, получена система интегральных уравнений второго рода:

$$(f+g)(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x,y,\tilde{c})(f+g)(y)\,dy + \varphi(x), \quad (14)$$

$$\left(g-f\right)(x)=\int_0^x \mathcal{M}(x,y,\tilde{c})\left(g-f\right)(y)\,dy+\frac{1}{a}\tilde{\psi}(x)+C, \qquad (15)$$

где $\tilde{\psi}(x)=\int_0^x \psi(y)\,dy$ и ядра интегральных уравнений представляются в виде

$$\mathcal{K}(x,y,\tilde{c})=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}^k x^k (x-y)^{k-1}}{k!\,(k-1)!},$$

$$\mathcal{M}(x,y,\tilde{c})=-\tilde{c}y-\int_y^x\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tilde{c}^k z^k (z-y)^{k-2}}{k!\,(k-2)!}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}^k z^{k-1}(z-y)^{k-1}}{\left((k-1)!\right)^2}\right]dz,$$

Уравнения (14), (15) решаем методом последовательных приближений. Выберем в качестве $(f+g)_0(x)=\varphi(x)$, а в качестве $(g-f)_0(x)=\frac{1}{a}\tilde{\psi}(x)+C$, тогда

$$(f+g)_1(x)=\int_0^x \mathcal{K}(x,y,\tilde{c})\varphi(y)\,dy+\varphi(x), \qquad (16)$$

$$(g-f)_1(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \mathcal{M}(x,y,\tilde{c})\tilde{\psi}(y)\,dy+C\int_0^x \mathcal{M}(x,y,\tilde{c})\,dy+\frac{1}{a}\tilde{\psi}(x)+C. \qquad (17)$$

Заметим, что

$$\int_0^x \mathcal{M}(x,y,\tilde{c})\,dy=0, \quad (18)$$

тогда (16), (17) с учетом обозначений $\mathcal{K}^1(x,y,\tilde{c})=\int_0^x \mathcal{K}(x,y,\tilde{c})\varphi(y)\,dy$, $\mathcal{M}^1(x,\tilde{c},\tilde{\psi})=\int_0^x \mathcal{M}(x,y,\tilde{c})\tilde{\psi}(y)\,dy$ примут вид

$$(f+g)_1(x)=\mathcal{K}^1(x,\tilde{c},\varphi)+\varphi(x),$$

$$(g-f)_1(x)=\frac{1}{a}\mathcal{M}^1(x,\tilde{c},\tilde{\psi})+\frac{1}{a}\tilde{\psi}(x)+C.$$

Подставляя полученные выражения для $(f+g)_1(x)$, $(g-f)_1(x)$ в уравнения (14), (15), а также учитывая (18) и вводя обозначения $\mathcal{K}^2(x,\tilde{c},\varphi)=\int_0^x \mathcal{K}(x,x^1,\tilde{c})\int_0^{x^1}\mathcal{K}(x^1,y,\tilde{c})\varphi(y)\,dy\,dx^1=\int_0^x \mathcal{K}(x,z,\tilde{c})\,\mathcal{K}^1(z,\tilde{c},\varphi)\,dz$,

$\mathcal{M}^{2}\left(x,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)=\int\limits_0^x \mathcal{M}\left(x,x^1,\tilde{c}\right)\int\limits_0^{x^1}\mathcal{M}\left(x^1,y,\tilde{c}\right)\tilde{\psi}\left(y\right)dydx^1=\int\limits_0^x \mathcal{M}\left(x,z,\tilde{c}\right)\mathcal{M}^{1}\left(z,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)dz$, получим

$$\left(f+g\right)_2\left(x\right)=\mathcal{K}^{2}\left(x,\tilde{c},\varphi\right)+\mathcal{K}^{1}\left(x,\tilde{c},\varphi\right)+\varphi\left(x\right),$$

$$\left(g-f\right)_2\left(x\right)=\frac{1}{a}\mathcal{M}^{2}\left(x,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)+\frac{1}{a}\mathcal{M}^{1}\left(x,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)+\frac{1}{a}\tilde{\psi}\left(x\right)+C.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим

$$\left(f+g\right)_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\mathcal{K}^{k}\left(x,\tilde{c},\varphi\right), \tag{19}$$

$$\left(g-f\right)_n\left(x\right)=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{M}^{k}\left(x,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)+C, \tag{20}$$

где $\mathcal{K}^{0}\left(x,\tilde{c},\varphi\right)=\varphi\left(x\right)$, $\mathcal{M}^{0}\left(x,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)=\tilde{\psi}\left(x\right)$,

$$\mathcal{K}^{k}\left(x,\tilde{c},\varphi\right)=\int\limits_0^x \mathcal{K}\left(x,x^1,\tilde{c}\right)\ldots\int\limits_0^{x^{k-1}}\mathcal{K}\left(x^{k-1},y,\tilde{c}\right)\varphi\left(y\right)dy\ldots dx^1=\int\limits_0^x \mathcal{K}\left(x,z,\tilde{c}\right)\mathcal{K}^{k-1}\left(z,\tilde{c},\varphi\right)dz,$$

$$\mathcal{M}^{k}\left(x,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)=\int\limits_0^x \mathcal{M}\left(x,x^1,\tilde{c}\right)\ldots\int\limits_0^{x^{k-1}}\mathcal{M}\left(x^{k-1},y,\tilde{c}\right)\tilde{\psi}\left(y\right)dy\ldots dx^1=\int\limits_0^x \mathcal{M}\left(x,z,\tilde{c}\right)\mathcal{M}^{k-1}\left(z,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)dz.$$

Переходя в (19), (20) к пределу при $n\to\infty$, получим решение интегральных уравнений (14), (15) в виде

$$\left(f+g\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{K}^{k}\left(x,\tilde{c},\varphi\right), \tag{21}$$

$$\left(g-f\right)\left(x\right)=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{M}^{k}\left(x,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)+C. \tag{22}$$

Решая систему (21), (22), получаем

$$g\left(x\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{K}^{k}\left(x,\tilde{c},\varphi\right)+\frac{1}{a}\mathcal{M}^{k}\left(x,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)\right)+\frac{1}{2}C,$$

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{K}^{k}\left(x,\tilde{c},\varphi\right)-\frac{1}{a}\mathcal{M}^{k}\left(x,\tilde{c},\tilde{\psi}\right)\right)-\frac{1}{2}C.$$

Подставляя последние выражения в (10), получим решение задачи Коши (6) – (7) в виде

$$u(t,x)=\tilde{f}(x-at)+\tilde{g}(x+at)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\tilde{c}^k(x+at)^k}{k!}\int_0^{x-at}\frac{(x-at-z)^{k-1}}{(k-1)!}\tilde{f}(z)\,dz+\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde{c}^k(x-at)^k}{k!}\int_0^{x+at}\frac{(x+at-y)^{k-1}}{(k-1)!}\tilde{g}(y)\,dy\right],$$

где

$$\tilde{g}(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{K}^k(x,\tilde{c},\varphi)+\frac{1}{a}\mathcal{M}^k(x,\tilde{c},\tilde{\psi})\right),$$
$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{K}^k(x,\tilde{c},\varphi)-\frac{1}{a}\mathcal{M}^k(x,\tilde{c},\tilde{\psi})\right).$$

Или

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{K}^k(x-at,\tilde{c},\varphi)+\mathcal{K}^k(x+at,\tilde{c},\varphi)}{2}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{M}^k(x+at,\tilde{c},\varphi)+\mathcal{M}^k(x-at,\tilde{c},\varphi)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\tilde{c}^k(x+at)^k}{k!}\int_0^{x-at}\frac{(x-at-z)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{K}^k(z,\tilde{c},\varphi)-\frac{1}{a}\mathcal{M}^k(z,\tilde{c},\tilde{\psi})\right)dz+\right. \tag{23}$$
$$\left.+\frac{\tilde{c}^k(x-at)^k}{k!}\int_0^{x+at}\frac{(x+at-y)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{K}^k(z,\tilde{c},\varphi)+\frac{1}{a}\mathcal{M}^k(z,\tilde{c},\tilde{\psi})\right)dy\right].$$

4. Решение задачи Коши для неоднородного телеграфного уравнения

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}-cu(t,x)=f(t,x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}, \tag{24}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{25}$$

где $\varphi(x)\in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x)\in C^1(\mathbb{R})$, $f(t,x)\in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R})$, $t\in(0,\infty)$, $x\in\mathbb{R}$.

Решение задачи (24) – (25) будем искать методом Дюамеля. Для этого представим функцию $u(t,x)$ в виде суммы двух функций

$$u(t,x)=\tilde{u}(t,x)+\tilde{\tilde{u}}(t,x), \tag{26}$$

где функция $\tilde{u}(t,x)$ является решением однородной задачи Коши (24) – (25), решение которой имеет вид (23), а функция $\tilde{\tilde{u}}(t,x)$ – решение задачи Коши для неоднородного телеграфного уравнения с однородными начальными условиями

$$\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{u}}(t,x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{u}}(t,x)}{\partial x^2} - c\tilde{\tilde{u}}(t,x) = f(t,x), \ t>0, \ x\in\mathbb{R}, \tag{27}$$

$$\tilde{\tilde{u}}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\tilde{u}}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \ x\in\mathbb{R}. \tag{28}$$

Согласно методу Дюамеля решение задачи (27) – (28) представимо в виде

$$\tilde{\tilde{u}}(t,x) = \int_0^t w(t-\tau,\tau,x)\,d\tau, \tag{29}$$

где функция $w(t,\tau,x)$ – решение вспомогательной задачи

$$\frac{\partial^2 w(t,\tau,x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w(t,\tau,x)}{\partial x^2} - cw(t,\tau,x) = 0, \ t>0, \ x\in\mathbb{R}, \ \tau>0, \tag{30}$$

$$w\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(\tau,x), \ x\in\mathbb{R}, \ \tau>0. \tag{31}$$

Непосредственной подстановкой выражения (29) в уравнение (24) и начальные условия (25) с учетом уравнения (30) и условий (31) можно убедиться, то (29) действительно является решением задачи (27) – (28).

Задача Коши (30) – (31) имеет единственное решение, которое представимо в виде (23). Таким образом, решение задачи (27) – (28) имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{u}}(t,x) = \int_0^t \Bigg\{ &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^k\big(x+a(t-\tau),\tilde{c},f(\tau,\xi)\big) + \mathcal{M}^k\big(x-a(t-\tau),\tilde{c},f(\tau,\xi)\big)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\frac{\tilde{c}^k\big(x-a(t-\tau)\big)^k}{k!}\int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{\big(x+a(t-\tau)-y\big)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{M}^k\big(z,\tilde{c},f(\tau,\xi)\big)\,dy - \\ &- \frac{\tilde{c}^k\big(x+a(t-\tau)\big)^k}{k!}\int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{\big(x-a(t-\tau)-z\big)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{M}^k\big(z,\tilde{c},f(\tau,\xi)\big)\,dz\Bigg]\Bigg\}d\tau.\end{aligned} \tag{32}$$

Решение неоднородной задачи Коши (24) – (25) находим по формуле (26).

Таким образом, было найдено общее решение телеграфного уравнения, а также решение задачи Коши для однородного и неоднородного телеграфного уравнения. Результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Если функции $\varphi\in C^2(\mathbb{R}), \psi\in C^1(\mathbb{R}), f\in C^1((0,\infty)\times\mathbb{R})$, то существует единственное решение $u\in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$ задачи (24), (25), которое определяется формулами (26), (23), (32).

Доказательство теоремы фактически следует из предыдущих рассуждений. Формулы (23) и (32) действительно определяют собой функции, так как для любых значений $t, x \in 0, \infty \times \mathbb{R}$ ряды в этих выражениях сходятся. Из условий теоремы на функции φ, ψ, f следует, что функции (23) и (32) являются на $0, \infty \times \mathbb{R}$ непрерывными и непрерывные их производные первого и второго порядков.

Единственность решения следует из определения функций (23) и (32) единственным образом через функции φ, ψ, f.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ширма М.С.* // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т.53. №1. С.45.

2. *Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ширма М.С.* // Труды Института математики. 2009. Т. 17. № 2. С. 23.

3. *Корзюк В.И., Ерофеенко В.Т., Пулко Ю.В.* // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 5. С. 36.

4. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 656 с.

5. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физики. М.: Наука. 1972. 686 с.

6. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука. 1979. 224 с.