ИССЛЕДОВАНИЕ НМ-СЕТЕЙ С ЗАВИСИМЫМИ ОТ ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПРИОРИТЕТНЫМИ ЗАЯВКАМИ

***Н. В. ЧЁРНАЯ*, М. А. МАТАЛЫЦКИЙ**

Markov HM-networks with intensities depending on the time and priority applications, their use in forecasting incomes logistics transportation system (LTS) are investigated in this work. methods in probability theory, queuing, stochastic processes and differential equations are used in the process,. A series of theoretical results with practical significance are used in practice. The results were used in analyzing and optimizing incomes of specific logistics of transport systems

Ключевые слова: НМ-сети с доходами, приоритетные заявки

1. Введение

Теория массового обслуживания (ТМО) – один из важных разделов экономико-математического моделирования, занимающийся анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления, в которых многократно повторяются однотипные события, например, на автоматических линиях производства, в различных военных системах, компьютерных сетях и др. [1]. Она представляет собой теоретические основы комплекса вопросов эффективности построения и эксплуатации систем массового обслуживания (СМО). Цель ТМО – разработка рекомендаций по оптимальному построению систем, рациональная организация их работы и обеспечение максимальной эффективности их функционирования.

Каждая СМО включает в себя некоторые обслуживающие устройства, которые называются линиями обслуживания. В этом качестве может выступать различное оборудование, персонал, выполняющий те или иные операции, сервер в компьютерной сети, строительные бригады по загрузке-разгрузке, билетные кассы и т.д. Если СМО включает в себя одну линию обслуживания, то она называется однолинейной, в противном случае – многолинейной.

На вход в СМО в случайные моменты времени поступает поток заявок. Под заявкой понимается запрос на удовлетворение определенной потребности, например оплату счетов, медицинскую консультацию, обработку запроса пользователя, разгрузку автомобиля или железнодорожного эшелона и т.д.

В каждой системе массового обслуживания можно выделить следующие основные элементы: а) входящий поток заявок, б) очередь, в) линии обслуживания, г) выходящий поток обслуженных заявок. Параметрами СМО являются вид потока заявок, число линий обслуживания, их интенсивность обслуживания и правило организации работы СМО.

Под сетью массового обслуживания (МО) – совокупность СМО, между которыми циркулируют заявки, переходя из одной СМО в другую. В данной работе будем рассматривать сети МО с доходами или НМ (Howard-Matalytski) -сети, состоящие из n СМО $S_1, S_2, ..., S_n$. Заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней системе некоторый доход и соответственно доход первой системы уменьшается на эту величину [2].

2. Нахождение доходов НМ-сетей с зависимыми от времени интенсивностями обслуживания заявок

Рассмотрим НМ (Howard-Matalytski) – сеть произвольной структуры с однотипными заявками, состоящую из n систем обслуживания (СМО) $S_1, S_2, ..., S_n$. Рассмотрим случай, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от состояний сети и времени, а СМО сети являются однолинейными.

Пусть в сеть поступает простейший поток однотипных заявок с интенсивностью λ, причем в i-ю СМО каждая заявка входящего потока независимо от других заявок поступает с вероятностью p_{oi}, $i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} p_{oi} = 1$. Заявка, завершающая обслуживание в i-ой СМО, мгновенно и независимо от других заявок с вероятностью p_{ij} переходит в систему S_j, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, $i = \overline{1,n}$.

Состояние сети описывается случайным процессом $k(t) = (k_1(t),\ k_2(t),\ ...,\ k_n(t))$, где $k_i(t)$ – число заявок в i-ой СМО в момент времени t, $i = \overline{1,n}$.

Предполагается, что параметры обслуживания заявок в СМО, зависят от времени, т.е. если в момент времени t на обслуживании в i-ой СМО находится заявка, то в интервале $[t; t + \Delta t]$ ее обслуживание закончится с вероятностью $\mu_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1,n}$.

Обозначим через $v_i(k,t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k; $r_i(k)$ – доход системы S_i в единицу времени, когда сеть находится в состоянии k; I_i – вектор размерности n с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером i, которая равна 1; $r_{0i}(k+I_i,t)$ - доход системы S_i, когда сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_i,t+\Delta t)$ за время Δt; $-R_{i0}(k-I_i,t+\Delta t)$ – доход этой системы, если сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k-I_i,t+\Delta t)$; $r_{ij}(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ – доход системы S_i, (расход или убыток системы S_j), когда сеть изменяет свое состояние из (k,t) на $(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ за время Δt, $i,j=\overline{1,n}$.

Пусть сеть находится в состоянии (k,t). В течение интервала времени Δt она может остаться в состоянии k или перейти в состояния $(k-I_i),(k+I_i),(k+I_i-I_j)$, $i,j=\overline{1,n}$. Если сеть остается в состоянии $(k,t+\Delta t)$, то ожидаемый доход системы S_i составит $r_i(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_i(k,t)$, который она получит за оставшиеся t единиц времени. Вероятность такого события равна $1-(\lambda+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)u(k_j))\Delta t+o(\Delta t)$, где $u(x)$ – функция Хевисайда. Если же сеть перейдет в состояние $(k+I_i,t+\Delta t)$ с вероятностью $\lambda p_{0i}\Delta t+o(\Delta t)$, то доход системы S_i составит $[r_{0i}(k+I_i,t)+v_i(k+I_i,t)]$, а если в состояние $(k-I_i,t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_i(t)u(k_i)p_{oi}\Delta t+o(\Delta t)$, то доход этой системы составит $[-R_{0i}(k-I_i,t)+v_i(k-I_i,t)]$, $i=\overline{1,n}$. Аналогично, если сеть переходит из состояния (k,t) в состояние $(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_j(t)u(k_j)p_{ji}\Delta t+o(\Delta t)$, она приносит системе S_i доход в размере $r_{ij}(k+I_i-I_j,t)$ плюс ожидаемый доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было состояние $(k+I_i-I_j,t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности для математического ожидания, разделив на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$ получаем систему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\begin{aligned}\frac{dv_i(k,t)}{dt}=&-\left[\lambda+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)u(k_j)\right]v_i(k,t)+\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda p_{0j}v_i(k+I_j,t)+\mu_j(t)u(k_j)p_{j0}v_i(k-I_j,t)\right]+\\&+\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}\left[\mu_j(t)u(k_j)p_{ji}v_i(k+I_i-I_j,t)+\mu(t)u(k_i)p_{ij}v_i(k-I_i+I_j,t)\right]+\\&+\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}\left[\mu_j(t)u(k_j)p_{ji}r_{ij}(k+I_i-I_j,t)+\mu_i(t)u(k_i)p_{ij}r_{ij}(k-I_i+I_J,t)\right]+\\&+\sum_{\substack{c,s=1\\c,s\ne i}}^{n}\mu_s(t)u(k_s)p_{sc}v_i(k+I_c-I_s,t)+\lambda p_{0i}r_{0i}(k+I_i,t)-\mu_i(t)u(k_i)p_{i0}R_{0i}(k-I_i,t)+r_i(k),i=\overline{1,n}.\end{aligned}\tag{1}$$

Число уравнений в этой системе равно числу состояний сети [3].

Для замкнутых сетей система уравнений (1) может быть сведена к системе конечного числа линейных неоднородных ДУ, которая в матричной форме может быть записана в виде

$$\frac{dV_i(t)}{dt}=Q_i(t)+A(t)V_i(t),\ i=\overline{1,n},\tag{2}$$

где $V_i^T(t)=(v_i(1,t),\ldots,v_i(L,t))$ – вектор доходов системы S_i, L – число состояний сети.

Решение системы (2) можно найти, используя метод преобразований Лапласа. Пусть $U_i(s)$, $G_i(s)$, $W(s)$ – вектора преобразований Лапласа функций $v_i(j,t)$, $Q_i(t)$, $A(t)$, $i=\overline{1,L}$ соответственно. Тогда $sU_i(s)-V_i(0)=G_i(s)+f_i(W(s),U_i(s))$. Решая это функциональное уравнение относительно $U_i(s)$, получим:

$$U_i(s)=F_i\ (G_i(s),W(s)),\ i=\overline{1,n}.\tag{3}$$

Взяв обратное преобразование Лапласа от обеих частей равенства (3), можно найти функции $v_i(j,t),\ i=\overline{1,L}.$

3. Нахождение ожидаемых доходов НМ-сети с приоритетными заявками

Рассмотрим замкнутую сеть, в которой циркулируют K_1 заявок первого типа и K_2 заявок второго типа, причем заявки не могут менять свой тип. Матрица вероятностей переходов заявок между системами сети $\| p_{ij} \|_{n\times n}$ является неприводимой. Система S_i содержит m_i параллельных линий обслуживания, время обслуживания заявки c-го типа любой линией системы имеет показательное распределение со средним μ_{ic}^{-1}, $i=\overline{1,n}$, $c=1,2$. Однотипные заявки, стоящие в очереди некоторой СМО, выбираются на обслуживание в произвольном порядке, например, FIFO. Заявки первого типа имеют абсолютный приоритет по отношению к заявкам второго типа. В данном случае это будет означать выполнение двух условий: а) если в момент освобождения линии некоторой СМО после обслуживания заявки в ее очереди имеются приоритетные заявки, то любая из них занимает освободившуюся линию, б) если в систему обслуживания, все линии которой заняты обслуживанием, но не только приоритетных заявок, поступает приоритетная заявка, то она вытесняет неприоритетную заявку с одной из линий и начинает обслуживаться этой линией; вытесненная заявка становится в очередь рассматриваемой СМО. Когда вытесненная заявка поступает на обслуживание повторно, она дообслуживается в течение оставшегося времени обслуживания. Поскольку время обслуживания имеет показательное распределение, то можно считать, что вытесненная заявка будет обслуживаться заново, т.е. имеем так называемое неидентичное обслуживание.

Состояния сети в данном случае характеризуется вектором $k(t)=(k,t)=(k_{11},k_{12};k_{21},k_{22};...;k_{n1},k_{n2};t)$, где k_{ic} – число заявок типа c в i-й СМО, $\sum_{i=1}^{n} k_{i1}=K_1$, $\sum_{i=1}^{n} k_{i2}=K_2$.

Пусть I_{i1} — вектор размерности $2n$ с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером $2i-1$, которая равна 1, I_{i2} — вектор размерности $2n$ с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером $2i$, которая равна 1, I_0 — $2n$-вектор с нулевыми компонентами,

$$\begin{aligned} &k+I_{i1}-I_{j1}=(k_{11},k_{12};...;\ k_{i1}+1,\ k_{i2};\ ...;\ k_{j1}-1,\ k_{j2};\ ...;\ k_{n1},k_{n2}),\\ &k+I_{i2}-I_{j2}=(k_{11},k_{12};...;\ k_{i1},\ k_{i2}+1;\ ...;\ k_{j1},\ k_{j2}-1;\ ...;\ k_{n1},k_{n2}). \end{aligned} \tag{4}$$

Система уравнений для вероятностей состояний $P(k,t)$ приведена, например, в [1]:

$$\frac{dP(k,t)}{dt}=-\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}[\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(k_{i1})+\mu_{i2}\varepsilon_{i2}(k_{i1},k_{i2})]p_{ij}P(k,t)+$$

$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}[\beta_{i1}(k)P(k+I_{i1}-I_{j1},t)+\gamma_{ij}(k)P(k+I_{i2}-I_{j2},t)],$$

где $\beta_{ij}(k)=\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(k_{i1})u(k_{i1})u(K_1-k_{j1})p_{ij}$, $\gamma_{ij}(k)=\mu_{i2}\varepsilon_{i2}(k_{i1},k_{i2})u(k_{i2})u(K_2-k_{j2})p_{ij}$,

$$\varepsilon_{i1}(k_{i1})=\min\{k_{i1},m_i\},\quad i=\overline{1,n},\ \varepsilon_{i2}(k_{i1},k_{i2})=\begin{cases} k_{i2},\ \ k_{i1}+k_{i2}<m_i,\\ m_i-k_{i1},\ k_{i1}<m_i,\ k_{i1}+k_{i2}\geq m_i,\ i=\overline{1,n}.\\ 0,\ k_{i1}\geq m_i. \end{cases}$$

Пусть $v_i(k,t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k, и предположим, что эта функция дифференцируема по t; $r_i(k)$ – доход системы S_i в единицу времени, когда сеть находится в состоянии k; $r^{(1)}(k+I_{i1}-I_{j1},t)$ – доход системы S_i (расход или убыток системы S_j), когда сеть меняет свое состояние из (k,t) на $\left(k+I_{i1}-I_{j1},t+\Delta t\right)$ за время Δt, $r^{(2)}(k+I_{i2}-I_{j2},t)$ – доход системы S_i (расход или убыток системы S_j), когда сеть меняет свое состояние из (k,t) на $\left(k+I_{i2}-I_{j2},t+\Delta t\right)$ за время Δt, $j=\overline{1,n}$, $j\neq i$.

В течение интервала времени Δt сеть может остаться в состоянии (k,t) либо совершить переход в состояния $(k+I_{i1}-I_{j1},t+\Delta t)$, $(k-I_{i1}+I_{j1},t+\Delta t)$, $(k+I_{i2}-I_{j2},t+\Delta t)$, $(k-I_{i2}+I_{j2},t+\Delta t)$ Если за время Δt сеть совершает переход в состояние $(k+I_{i1}-I_{j1},t+\Delta t)$ с вероятностью $\beta_{ji}(k+I_{i1}-I_{j1})=$ $=\mu_{j1}\varepsilon_{j1}(k_{j1})u(k_{j1})u(K_1-k_{i1})p_{ji}\Delta t+o(\Delta t)$, доход системы S_i составит $r^{(1)}(k+I_{i1}-I_{j1},t)$ плюс ожидаемый доход $v_i(k+I_{i1}-I_{j1},t)$, который будет получен за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было $(k+I_{i1}-I_{j1})$, $j=\overline{1,n}$. Если же за время Δt сеть совершает переход в состояние

$(k+I_{i2}-I_{j2},t+\Delta t)$ с вероятностью $\gamma_{ji}(k+I_{i2}-I_{j2})=\mu_{j2}\varepsilon_{j2}(k_{j1},k_{j2})u(k_{j2})u(K_2-k_{i2})p_{ji}\Delta t+o(\Delta t)$, то доход составит $r^{(2)}(k+I_{i2}-I_{j2},t)$ плюс ожидаемый доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием было $(k+I_{i2}-I_{j2})$, $j\neq i$. Если за время Δt сеть совершает переход в состояние $(k-I_{i1}+I_{j1},t+\Delta t)$ с вероятностью $\beta_{ij}(k-I_{i1}+I_{j1})=\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(k_{i1})u(k_{i1})u(K_1-k_{j1})p_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$, доход системы S_i составит $r^{(1)}(k-I_{i1}+I_{j1},t)$ плюс ожидаемый доход $v_i(k-I_{i1}+I_{j1},t)$, который будет получен за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было $(k-I_{i1}+I_{j1})$, $j=\overline{1,n}$. Если же за время Δt сеть совершает переход в состояние $(k-I_{i2}+I_{j2},t+\Delta t)$ с вероятностью $\gamma_{ji}(k-I_{i2}+I_{j2})=$ $=\mu_{i2}\varepsilon_{i2}(k_{i1},k_{i2})u(k_{i2})u(K_2-k_{j2})p_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$, то доход составит $r^{(2)}(k-I_{i2}+I_{j2},t)$ плюс ожидаемый доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием было $(k-I_{i2}+I_{j2})$, $j\neq i$. И, наконец, если сеть останется в состоянии $(k,t+\Delta t)$ с вероятностью $1-\sum\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n}[(\mu_{j1}\varepsilon_{j1}(k_{j1})+\mu_{j2}\varepsilon_{j2}(k_{j1},k_{j2}))p_{ji}+,$ $+(\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(k_{i1})+\mu_{i2}\varepsilon_{i2}(k_{i1},k_{i2}))p_{ij}]\Delta t+o(\Delta t)$ доход системы будет равен $r_i(k)\Delta t+v_i(k,t)$. Для ожидаемого дохода системы S_i за время $t+\Delta t$ можно получить систему разностных уравнений, разделив в котором обе части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$ получим систему РДУ для ожидаемых доходов систем сети:

$$\frac{dv_i(k,t)}{dt}=-(\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n}[\mu_{j1}\varepsilon_{j1}(k_{j1})+\mu_{j2}\varepsilon_{j2}(k_{j1},k_{j2})p_{ji}+(\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(k_{i1})+\mu_{i2}\varepsilon_{i2}(k_{i1},k_{i2}))p_{ij}]v_i(k,t)+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_{j1}\varepsilon_{j1}(k_{j1})u(k_{j1})u(K_1-k_{i1})p_{ji}[r^{(1)}(k+I_{i1}-I_{j1},t)+v_i(k+I_{i1}-I_{j1},t)]+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_{j2}\varepsilon_{j2}(k_{j1},k_{j2})u(k_{j2})u(K_2-k_{i2})p_{ji}[r^{(2)}(k+I_{i2}-I_{j2},t)+v_i(k+I_{i2}-I_{j2},t)]+ \tag{5}$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(k_{i1})u(k_{i1})u(K_1-k_{j1})p_{ij}[-r^{(1)}(k-I_{i1}+I_{j1},t)+v_i(k-I_{i1}+I_{j1},t)]+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_{i2}\varepsilon_{i2}(k_{i1},k_{i2})u(k_{i2})u(K_2-k_{j2})p_{ij}[-r^{(2)}(k-I_{i2}+I_{j2},t)+v_i(k-I_{i2}+I_{j2},t)]+r_i(k),\ i=\overline{1,n}.$$

Система (5) в матричной форме может быть записана в виде [4]

$$\frac{dV_i(t)}{dt}=Q_i+A_iV_i(t),\ i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где $V_i^T(t)=\left(v_i(1,t),\ldots,v_i(L,t)\right)$ – вектор доходов системы S_i, L - число состояний сети. Количество приоритетных и неприоритетных заявок не зависит друг от друга, поэтому число состояний в рассматриваемой нами сети равняется числу способов размещения K_1 приоритетных заявок и K_2 неприоритетных заявок по n системам обслуживания, то есть $L=C_{n+K_1-1}^{n-1}C_{n+K_2-1}^{n-1}$.

Вектора Q_1, Q_2 и матрицы A_1 и A_2 имеют большую размерность, равную числу состояний сети. Их вычисление занимает продолжительное время, связанное с тем, что необходимо хранить в памяти компьютера большое количество элементов (особенно если речь о сетях большой размерности). Поэтому алгоритм нахождения доходов можно значительно ускорить, если не находить в явном виде матрицы в системе (6) и не хранить никакой промежуточной информации, а сразу получать конечный результат для ожидаемых доходов.

Литература

1. *Маталыцкий, М.А.* Теория массового обслуживания / М.А. Маталыцкий, А.В. Паньков, О.М.Тихоненко. – Гродно: ГрГУ, 2008. – 771 с.
2. *Маталыцкий, М.А.* О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских систем с доходами и их применение. / М.А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 10. – С. 97 – 113.

3. *Matalytski, M.* Method of finding incomes in HM-networks with time-dependent intensity of requests service / M. Matalytski, O. Kiturko, N. Czhornaja // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science Czestochowa University of Technology. – 2011. – Vol. 11, №3. – P. 95-104.
4. *Matalytski, M.* Finding of the expected incomes in HM-network with the priority requests and linear time–dependent intensity of their service / M. Matalytski, O. Kiturko, N. Czhornaja // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science Czestochowa University of Technology. – 2011. – Vol. 11, №3. – P. 105-116.