СВОЙСТВА ГАНКЕЛЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОМПАКТНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ

Р. В. ДЫБА, **А. Р. МИРОТИН**

The Nehari theorem for classical Hankel operators is generalized to compact abelian groups with linearly ordered duals. Also considered the question of compactness of generalized Hankel operators

Ключевые слова: компактная абелева группа, линейно упорядоченная группа, оператор Ганкеля, пространство Харди

Пусть G – компактная абелева группа. Обозначим через X группу характеров группы G (т.е. непрерывных гомоморфизмов из G в одномерный тор **T**). Будем предполагать, что X является линейно упорядоченной группой. Обозначим через X_+ положительный конус группы X, через X_- – отрицательный. «Крышкой» будем обозначать преобразование Фурье в группе G.

Пространство Харди над G определяется следующим образом:

$$H^p(G)=\{ f\in L^2(G) \mid \widehat{f}(\chi)=0 \ \ \forall\chi\in X_-\setminus\{1\}\} \ \left(1\le p\le\infty\right).$$

Обозначим через $H_-^2(G)$ ортогональное дополнение пространства Харди в $L^2(G)$. Тогда $H_-^2(G)=$ $=\{ f\in L^2(G) \mid \widehat{f}(\chi)=0 \ \ \forall\chi\in X_+\}$. При этом X_+ является ортонормированным базисом в пространстве $H^2(G)$, а $X_-\setminus\{1\}$– в пространстве $H_-^2(G)$).

Определение. Пусть $\varphi\in L^\infty(G)$. Рассмотрим оператор умножения $M_\varphi : L^2(G)\to L^2(G): f\mapsto\varphi f$. *Оператором Ганкеля* назовем оператор $H_\varphi : H^2(G)\to H_-^2(G)$, определяемый равенством

$$H_\varphi = P_- M_\varphi,$$

где $P_- : L^2(G)\to H_-^2(G)$ – оператор ортогонального проектирования. Функцию φ будем называть *символом* оператора H_φ.

Равенство $H_\varphi S_\chi = P_- S_\chi H_\varphi, \forall\chi\in X_+$ будем далее называть *уравнением Ганкеля*.

Теорема 1. Ограниченный оператор $H: H^2(G)\to H_-^2(G)$ является оператором Ганкеля, т.е. $H=H_\varphi, \varphi\in L^\infty(G)$, тогда и тогда, когда H удовлетворяет уравнению Ганкеля. При этом $\|H\|=\|\varphi\|_\infty = dist_{L^\infty}\left(\varphi, H^\infty\left(G\right)\right)$.

В классическом случае одномерного тора в силу известной теоремы Хартмана ганкелев оператор компактен, если и только если он совпадает с ганкелевым оператором с непрерывным символом. Из следующей теоремы вытекает, что в общем случае это не так.

Теорема 2. Оператор H_χ, где $\chi\in X_-$, компактен тогда и только тогда, когда $\chi\in X^i$. При этом $rankH_\chi = -ind\,\chi$.

Следствие. Если все ганкелевы операторы с непрерывными символами над группой G компактны, то G изоморфна одномерному тору **T**.

Литература

1. *Пеллер, В.В.* Операторы Ганкеля и их приложения / В.В. Пеллер. // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». - 2005. - 1028 с.
2. *Nikolski, N.K.* Operators, Functions and Systems: An Easy Reading / N.K. Nikolski // Amer. Math. Soc. - 2002. - Vol. I. - 461 c.