МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Вісник
ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Заснований у 1993 р.

МЕХАНІКА

Випуск 4, том 1

Дніпропетровськ
Видавництво
Дніпропетровського
університету
2001

12. Фильштинский Л. А. Об особенности поля напряжений в упругой анизотропной полуплоскости с выходящим на границу ребром // Прикл. мех. 1981. Т.17. №10. С. 107–111.
13. Sternberg E. Load - transfer and load - diffusion in elastostatics // Proc. 6th U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech. New York. ASME.1970. P. 34 – 61. (Рус. перев. :Механика. Сб. перев. 1972. №6. С. 112 – 149).

Надійшла до редколегії 04.01.2001

УДК 51.077.8+519.68+539.214+539.3:534.1

Ю. В. Позняк
Белорусский государственный университет

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НА БАЗЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ *MATHEMATICA*

Розглядаються нові можливості математичного моделювання і комп'ютерного експерименту з використанням методів і засобів комп'ютерної математики. За допомогою комп'ютерної технічної системи *Mathematica* доведена асимптотична точність гіпотези Кирхгофа-Лява для ортотропних прямокутних пластин в умовах комбінованого навантаження.

В настоящее время вычислительный эксперимент занимает важнейшее место среди технологий научных исследований. В данной статье рассматриваются новые возможности математического моделирования и компьютерного эксперимента с использованием методов и средств компьютерной математики, интенсивно развивающейся в последнее десятилетие [3; 4; 7].

Как известно, в ходе вычислительного эксперимента объект любой природы (физический, химический, биологический, социальный и т. д.) абстрагируется от учета несущественных параметров и описывается с помощью математической модели, которая в большинстве случаев не носит дискретный характер. Традиционная технология вычислительного эксперимента предполагает выполнение дискретизации полученной математической модели, разработку программного обеспечения, реализующего вычислительный алгоритм, и численный анализ модели исследуемого объекта.

Одной из ключевых проблем применения технологии вычислительного эксперимента является обеспечение достоверности его результатов. С одной стороны, наряду с неизбежными проблемами адекватности математической модели объекту исследования приходится сталкиваться с ошибками, возникающими на этапах дискретизации модели и построения вычислительных алгоритмов (невыполнение условия консервативности разностных схем, неустойчивость вычислительных алгоритмов, накопление машинных ошибок и др.). С другой, в ряде случаев приходится решать задачи моделирования, не имея строгого обоснования корректности математической модели, получая необходимую информацию непосредственно в ходе вычислительного эксперимента. При этом особую роль играют модели с неполной информацией, или, даже не имеющие полностью формализованной математической постановки. В таких случаях проведение компьютерного эксперимента требует в системе человек–компьютер наличия сильных обратных связей на основе глубокого взаимодействия с моделями.

Существенно повысить достоверность и снизить трудоемкость вычислительного эксперимента позволяют современные системы компьютерной математики (СКМ) Maple, *Mathematica*, Matlab, MathCad, Reduce и др., которые в ряде случаев имеют средства для исследования математических моделей, минуя этапы их дискретизации и разработки вычислительных алгоритмов либо используя эффективные численно-аналитические методы. Одновременно СКМ являются современным средством глубокого взаимодействия человека с моделями.

Накопленный опыт проведения вычислительных экспериментов на основе современной универсальной компьютерной технической системы *Mathematica*, позволяет выделить для дальнейшего глубокого анализа два новых направления разработки и применения СКМ.

Технология программирования СКМ это разработка принципов функционирования, проектирования базовых алгоритмов и создания программной оболочки с развитыми средствами представления входных данных и результатов моделирования и, самое главное, открытой с точки зрения насыщения ее новыми математическими знаниями, представленными в формализованном виде. Важной особенностью процесса программирования СКМ является то, что на следующем этапе в нем может участвовать сам пользователь, включая в СКМ собственные программные модули или библиотеки, содержащие математические знания, необходимые для решения различных проблем и, в частности, его задач.

Технология применения СКМ включает в себя: абстрагирование объекта исследования, представление математической модели на входном языке и описание задания для выполнения аналитических преобразований и численных расчетов, подготовку и ввод исходных данных, отображение результатов, их предварительную обработку и диагностику ошибок, анализ результатов и принятие решения о дальнейшем проведении компьютерного эксперимента, включая изменение входных данных, математических моделей, алгоритмов.

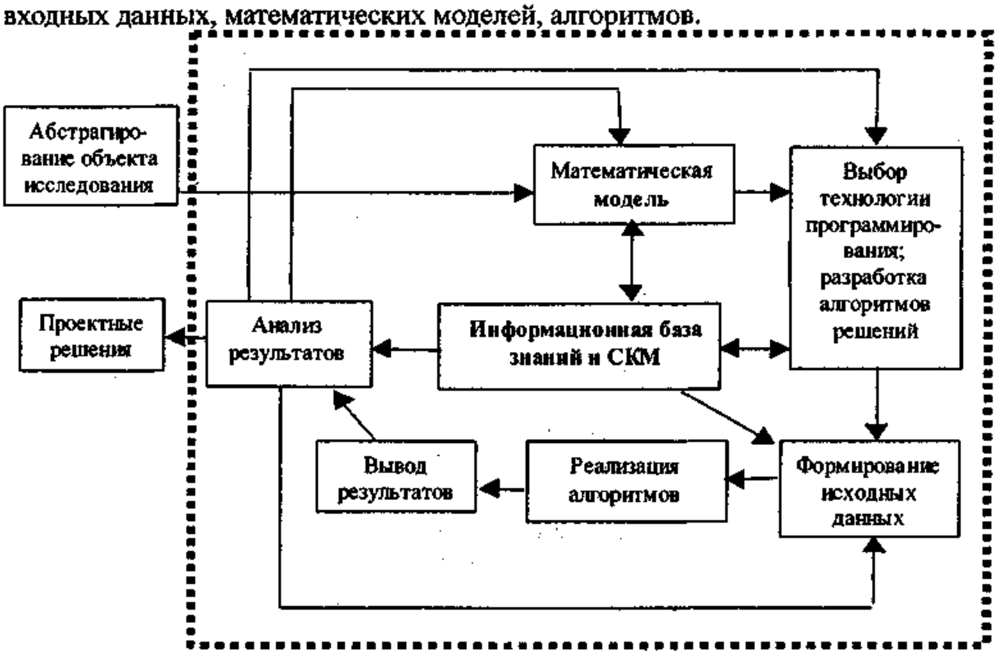

Рис. 1 Схема математического моделирования

Схема связи между введенными понятиями и математическим моделированием в самом общем его понимании приведена на рис. 1.

С нашей точки зрения, процесс вычислительного эксперимента с использованием СКМ осуществляется по сложному замкнутому технологическому циклу. Последовательность операций, выполняемых при этом в итерационном цикле, можно описать следующим образом:

a) Абстрагирование объекта исследования. Для исследования одной и той же проблемы может быть построена не одна, а последовательность вложенных или взаимодополняющих моделей с разной степенью адекватности.

b) Разработка математической модели, состоящая, например, в описании системы дифференциальных и(или) интегральных уравнений. Для проблем проектирования типичными являются задачи оптимизации. При наличии дефицита натурных измерений характерны также обратные задачи по идентификации параметров математической модели. Для одного и того же объекта исследования могут быть выбраны альтернативные математические модели, например, детерминированные или вероятностные. Для многих задач используется понятие информационной модели, включающей структуру входной, выходной и промежуточной информации, характер и способы ее преобразования. При больших объемах данных от этого в значительной степени зависят экономичность реализации задач и уровень общения исследователя с ЭВМ. Выбор математической модели в значительной степени определяется информационным наполнением (реализованными алгоритмами математических преобразований, вычислений и представления информации) тех СКМ, которые предполагается использовать для ее исследования.

c) После рассмотренных этапов следуют выбор технологии программирования, разработка алгоритмов решения и их представление на входном языке СКМ. Сюда входит модульный анализ всей проблемы, т. е. определение состава математических моделей и их взаимосвязей в различных схемах решения задач из рассматриваемого класса. Хотя эта задача выполняется математиком, она уже требует погружения в технологические аспекты создания соответствующей СКМ. Здесь устанавливаются структура программных модулей, характер информационных потоков, необходимые вычислительные ресурсы, операционная среда и требования к пользовательским интерфейсам. Алгоритм решения сформулированной математической задачи выбирается из базы знаний или заново разрабатывается.

d) Стадия непосредственной реализации алгоритмов в СКМ – одна из самых трудоемких. Длительность этого этапа определяется полнотой состава СКМ и эффективностью ее инструментальных средств. Он связан с формированием исходных данных, проведением вычислительных сеансов в пакетном или диалоговом режиме, обработкой информации и выводом результатов решения.

e) Далее ключевыми моментами являются анализ результатов и принятие решений о ходе компьютерного эксперимента. На основе сравнения решения со свойствами реального объекта делаются выводы о корректировке данных, об изменении математической модели или о привлечении других алгоритмов.

Качественное отличие приведенной схемы от существующих заключается в том, что она обобщена с учетом современного состояния технологий СКМ. Схема имеет, вообще говоря, пространственную структуру. Ее можно изобразить в виде трех плоскостей (рис.2).

Между плоскостями, где работают технологии программирования и применения СКМ, расположены база знаний и СКМ. Стрелками указаны их взаимные связи.

При этом необходимо учитывать, что технологическая цепочка применения СКМ принципиально включает не только технологическую цепочку программирования СКМ, но дополнительно имеет еще два процесса: абстрагирование объекта исследования и принятие решения.

Таким образом, сущностью математического моделирования на основе СКМ является реализация технологий программирования и применения СКМ и, следовательно, справедлива формула

Технология математического моделирования =
= технология программирования СКМ + технология применения СКМ.

Рис. 2.Технология математического моделирования

Она означает, что главное средство математического моделирования и его «форма существования» на нынешнем этапе развития информационных технологий – программное обеспечение на основе СКМ. Однако, научившийся программировать в СКМ специалист еще не становится специалистом по применению СКМ в моделировании. По образному выражению академика А. А. Самарского «считать, что научившийся программировать человек становится специалистом по математическому моделированию, равнозначно заблуждению, что для подготовки физика-экспериментатора достаточно научить его работать с паяльником». Следовательно, возникает необходимость включения в процесс подготовки специалистов естественно-научного и технического профилей дисциплин, посвященных современным информационным технологиям с применением СКМ, поскольку переориентация научно-исследовательской деятельности на использование современных компьютерных технологий невозможна без фундаментального образования на базе СКМ.

Для иллюстрации преимуществ использования технологии вычислительного эксперимента на основе компьютерной технической системы *Mathematica* рассмотрим ее применение для решения задачи трехмерной теории устойчивости ортотропных пластин методом степенных рядов [5].

Рассмотрим устойчивость ортотропной прямоугольной пластины $(0 < x_1 \le a, 0 < x_2 \le b, -h \le x_3 \le h)$ с позиций трехмерной линеаризированной теории устойчивости (второй вариант теории малых докритических деформаций [2]) при двухосном сжатии усилиями интенсивности p и q.

Для данной задачи соответствующие линеаризированные уравнения равновесия, граничные условия на незагруженных поверхностях и соотношения связи между напряжениями и деформациями имеют следующий вид

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{im} + \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}^{0} \frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) = 0 \quad \left(m = \overline{1,3}\right), \tag{1}$$

$$\sigma_{3i}\big|_{x_3 = \pm h} = 0 \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{im} = \delta_{im} \sum_{n=1}^{3} G_{iinn} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + (1 - \delta_{im}) G_{imim} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \quad \left(i, m = \overline{1,3}\right), \tag{3}$$

где σ_{im} – составляющие тензора возмущений напряжений деформированного тела; u_j – возмущения перемещений по соответствующим координатным осям; $\sigma_{11}^{0} = -p \ne 0, \sigma_{22}^{0} = -q \ne 0, \sigma_{33}^{0} = 0$, $\sigma_{ij}^{0} = 0$ (при $i \ne j$) – компоненты тензора напряжений в докритическом состоянии; G_{ijkl} – упругие постоянные, зависящие от свойств материала.

Подстановка (3) в (1) приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\sum_{j=1}^{3} L_{ij} u_j = 0 \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{4}$$

где L_{ij} – линейные дифференциальные операторы второго порядка:

$$L_{ij} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} \left(G_{ikjk} + \sigma_{kk}^{0}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + (1 - \delta_{ij})\left(G_{iijj} + G_{ijij}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{5}$$

Решение системы (4) запишем в виде

$$u_1 = F_1(x_3) \cos\frac{m\pi}{a} x_1 \sin\frac{n\pi}{b} x_2, \quad u_2 = F_2(x_3) \sin\frac{m\pi}{a} x_1 \cos\frac{n\pi}{b} x_2,$$

$$u_3 = F_3(x_3) \sin\frac{m\pi}{a} x_1 \sin\frac{n\pi}{b} x_2, \tag{6}$$

где m и n – параметры волнообразования при выпучивании.

Решение системы (4) в виде (6) позволяет удовлетворить при $x_1 = 0, a$ и $x_2 = 0, b$ условиям шарнирного опирания пластины в интегральном смысле [2].

В результате подстановки (6) в (4) с учетом (5) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{3} N_{ij} F_j(x_3) = 0 \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{7}$$

где N_{ij} – линейные дифференциальные операторы.

Если представить частные решения системы (7) в виде экспонент, то собственные значения (корни бикубического уравнения) можно найти как численно, так и аналитически, в частности, по известным формулам Кардано. Однако громоздкость последних не позволяет провести их качественный анализ. В несколько упрощенной постановке, например для трансверсально-изотропного материала при $\sigma_{11}^{0} = \sigma_{22}^{0}$ решение системы (4) можно найти операторными методами [2].

В настоящей работе используется метод степенных рядов, применение которого для ортотропного материала вполне обосновано [2].

Представим функции F_j в виде рядов по степеням x $(xh = x_3)$:

$$F_1 = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i, F_2 = \sum_{i=o}^{\infty} B_i x^i, F_3 = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i. \qquad (8)$$

После подстановки (8) в (7) получаем системы алгебраических линейных уравнений (относительно коэффициентов A_i, B_i, C_i), в которых $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$ играют роль произвольных постоянных. Определение A_i, B_i, C_i $(i \neq 0, 1)$ осложняется нарастающим объемом преобразований с увеличением i. Использование же при этом СКМ, в частности *Mathematica*, позволяет автоматизировать громоздкие аналитические преобразования и выписать выражения для коэффициентов рядов (8) в аналитическом виде.

Граничные условия (2) с учетом (3), (6) и (8) дают систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{\infty}\left[(i+1)A_{i+1} + mC_i\right]x^i\Big|_{x=\pm 1} = 0, \\
\sum_{i=0}^{\infty}\left[(i+1)B_{i+1} + \frac{na}{b}C_i\right]x^i\Big|_{x=\pm 1} = 0, \\
\sum_{i=0}^{\infty}\left[G_{1133} m A_i + G_{2233}\frac{na}{b}B_i - G_{3333}(i+1)C_{i+1}\right]x^i\Big|_{x=\pm 1} = 0.
\end{gathered} \qquad (9)$$

Из условия нетривиальности этой системы получаем уравнение

$$\Phi(P, \kappa) = 0 \qquad (10)$$

для нахождения зависимости между параметром нагружения $P = \sigma_{11}^{0} m^2 + \sigma_{22}^{0}\left(\frac{na}{b}\right)^2$ и геометрии $\kappa = \frac{\pi h}{a}$.

Представим P в виде ряда

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \kappa^{2j}. \qquad (11)$$

Выражения для p_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ можно получить из (10) для различных значений L $(0 \leq i \leq L < \infty)$ в формулах (8) при помощи *Mathematica*.

В частности, для $L = 5$ имеем $p_0 = 0$ и

$$P = p_1\kappa^2\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\kappa^2 + \dots\right), \qquad (12)$$

где

$$p_1 = \left[\left(G_{1133}^2 - G_{1111}G_{3333}\right)m^4 + \left(G_{2233}^2 - G_{2222}G_{3333}\right)\left(\frac{na}{m}\right)^4 - \right.$$

$$\left. - 2\left(G_{1212}G_{3333} + 2G_{1122}G_{3333} - G_{1133}G_{2233}\right)\left(\frac{mna}{b}\right)^2\right] / \left(3G_{3333}\right).$$

Выражение для p_1 совпадает с известным, вычисленным с привлечением гипотез Кирхгофа-Лява [1], что свидетельствует об асимптотической точности последних в теории устойчивости шарнирно опертых ортотропных пластин.

Следует отметить также, что по виду зависимости (3) совпадают с зависимостями для упругопластических тел в задачах о бифуркации процесса деформирования [6]. Следовательно сделанное выше заключение, по-видимому, будет справедливым и для пластин из упруго-пластического материала.

Как следует из текста программы в *Mathematica*, заинтересованный читатель может получить значения коэффициентов в разложении (11) для различных L. Анализ результатов показал, что приведенное значение p_1 начинает повторяться для $L \geq 5$, а значение p_2 (из-за громоздкости не приводится) – для $L \geq 9$.

Автор выражает благодарность Кулешову А.А. и Земскову С.В. за помощь, оказанную при подготовке статьи.

Библиографические ссылки

1. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360 с.
2. **Гузь А. Н., Бабич Ю. Н.** Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. К.:Вища шк., 1980. 168 с.
3. Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании // Тезисы докладов Второй международной научной конференции. Минск, 1999. 108 с.
4. Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании // Тезисы докладов Международной научной конференции. Минск, 1997. 179 с.
5. **Позняк Ю. В.** Методы компьютерной алгебры в трехмерной теории устойчивости прямоугольных пластин // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-тэх. н. №3. 1996. С. 104 – 106.
6. **Швайко Н. Ю.** Сложное нагружение и некоторые вопросы устойчивости элементов конструкций. // ПМ. 1979. Т. 15, № 2. С. 6 – 34.
7. Computer Algebra in Fundamental and Applied Research and Education. Proceedings of Second International Scientific Conference. Minsk, 1999. 134 с.

Надійшла до редколегії 12.01.2001