ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Ю. О. Цыбина, П. П. Кожич (Минск, Беларусь)

При изучении собственных значений и векторов в курсе математики полезным является параллельное рассмотрение экономических и других моделей, иллюстрирующих их глубинные свойства. В [1] приводится классическая задача о торговом балансе, использующая собственное значение $\lambda = 1$ матрицы $A_{n\times n}$ торгового баланса с суммой элементов каждого столбца равной единице для определения принадлежащего $\lambda = 1$ собственного вектора $\mathbf{x}$ национальных доходов торгующих стран для годовой бездефицитной (сбалансированной) торговли для каждой страны. Как дальнейшее развитие этой модели поставлена и решена задача о соотнесении сбалансированного $\mathbf{x}$ и реального $\mathbf{b}$ векторов национальных доходов, которые на практике всегда отличаются (задача о совмещении ломанных). Предложено в качестве вектора рекомендуемых национальных доходов брать $c^* \cdot \mathbf{x}$, где константа c^*, является решением задачи

$$f(c) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - c \cdot x_i)^2 \to \min$$

В рамках этого подхода предложены 1) экономическая трактовка собственных неотрицательных векторов, принадлежащих действительным $\lambda < 1$, а также 2) оценка экономических последствий для страны с реальным национальным доходом, меньше рекомендуемого $c^* \cdot \mathbf{x}$.

Методически полезными являются также практические расчеты рассмотренных моделей с применением, например, пакета «Mathematica», который был использован для оценки экономических последствий вступления Беларуси в ВТО, и показал эффективное время при работе с матрицей A при $n = 153$. Ввиду трудоемкости получения данных для матрицы таких размеров, важное значение приобретает агрегация.

Среди нескольких предложенных методов агрегации отметим естественную. При объединении в группу i-й и j-й стран $(i < j)$ элементы новой агрегированной матрицы A^a получаются из A за три шага: 1) i-я строка заменяется суммой ее i-й и j-й строк; 2) i-й столбец вычисляется с использованием элементов, измененных на предыдущем шаге:

$$a_{ki}^2 = \frac{a_{ki}^1 \cdot b_i + a_{kj}^1 \cdot b_j}{b_i + b_j}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

3) j-я строка и j-й столбец из A удаляются. Полученную матрицу обозначим A^a, а ее собственный вектор для $\lambda = 1$ обозначим $\mathbf{x}^a$. Справедлива

Теорема. *Собственный вектор агрегированной матрицы свойством аддитивности не обладает: т. е. в общем случае* $x_i^a \neq x_i + x_j$.

Авторы благодарят И. В. Большакову и С. В. Рогозина за внимание к работе.

Литература. 1. Чумаков Ф.В., Высшая математика: в 3 ч. Ч. 1. Мн.: Тесей, 2008.