О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛИНЕЙНО-НЕЗАВИСИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАВНОМЕРНО ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. А. Козлов (Новополоцк, Беларусь)

Рассмотрим трехмерную линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \quad m \in \{1, 2\}, \tag{1}$$

с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными [1, с. 252] матрицами коэффициентов A и B. Будем считать, что система (1) равномерно вполне управляема.

Определение [2]. Система (1) называется равномерно вполне управляемой, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^3$ на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление u, при всех $t \in$ $\in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

Зафиксируем для системы (1) числа σ и γ этого определения. Тогда из условия интегральной ограниченности матриц A и B будет следовать существование таких чисел $a, b \geqslant 1$, при которых для всех $t \geqslant 0$ выполняются оценки $\int_t^{t+\sigma} \|A(\tau)\|\, d\tau \leqslant$ $a < +\infty$, $\int_t^{t+\sigma} \|B(\tau)\|\, d\tau \leqslant b < +\infty$. Пусть $Q(t,\tau) := X(t,\tau)B(\tau)$, $t, \tau \geqslant 0$, где $X(t,\tau)$ — матрица Коши системы (1) с нулевым управлением. Возьмем произвольное число $s \geqslant 0$ и рассмотрим отрезок $[s, s+\sigma]$. При любом фиксированном натуральном $p \geqslant 2$ разделим этот отрезок точками $t_i := s + i\sigma/p$, $i = \overline{1, p-1}$, на p равных частей и для всякого измеримого и ограниченного управления $u(t)$, $t \in [s, s+\sigma]$, положим $w_i(s,u) := \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(s,\tau)u(\tau)\, d\tau$, $i = \overline{1,p}$, где $t_p := s + \sigma$. Обозначим $\mathbb{R}_+ := \{y \in$ $\in \mathbb{R} : y \geqslant 0\}$, $\gamma_1 := \max\{\gamma, \sqrt{3}\}$, $\ell = \ell(\varphi) := \min\{\varphi^2/(9\pi^2\gamma_1), \varphi^2/(12\pi^2)\}$. Положим также $\theta := 2\arcsin(4\gamma_1 b \exp a)^{-1}$.

Под выпуклым конусом будем понимать заостренный конус с вершиной в нуле. Угловой мерой выпуклого конуса $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ назовем величину $\sphericalangle\Phi := \sup\limits_{\xi_1,\xi_2\in\Phi} \sphericalangle(\xi_1,\xi_2)$. Для произвольного выпуклого конуса $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ обозначим через $K(\Phi)$ соответствующий ему конус, т.е. $K(\Phi) := \Phi \cup (-\Phi)$. Угловая мера конуса $K(\Phi)$ определяется угловой мерой соответствующего ему выпуклого конуса Φ. Для любых непустых множеств векторов $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ мерой угла между этими множествами будем называть величину $\sphericalangle(W_1,W_2) := \inf\limits_{\xi_1\in W_1,\,\xi_2\in W_2} \sphericalangle(\xi_1,\xi_2)$.

Основным результатом данной работы является теорема, обеспечивающая выбор для равномерно вполне управляемой системы (1) трех измеримых и ограниченных на положительной полуоси управлений, что решения этой системы с такими управлениями на любом отрезке длины σ являются линейно-независимыми векторами в трехмерном пространстве, лежащими в отделенных между собой выпуклых круглых конусах вполне определенной угловой меры, причем длина этих векторов-решений не меньше некоторой сторого фиксированной величины, т.е. справедлива следующая

Теорема. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то для любых* $t_0 \geqslant 0$, $0 < \varphi \leqslant \theta/16$ *и натурального* $p \geqslant 2$ *найдутся выпуклые конусы* $\Phi_1 \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ *и* $\Phi_2, \Phi_3 \subset \mathbb{R}^3$, *измеримые и ограниченные управления* $u_i(t)$, $t \in [t_0, t_0+\sigma]$, *и множества* $M_i \subset \{1,\ldots,p\}$, $i = \overline{1,3}$, *такие, что: угловая мера выпуклых конусов* Φ_i, $i=\overline{1,3}$, *не превосходит* 4φ; *верно соотношение* $\sphericalangle(K(\Phi_i),K(\Phi_j)) \geqslant 7\theta/16$, $i,j=\overline{1,3}$, $i \neq j$; *для всех* $t \in [t_0,t_0+\sigma]$ *выполняется оценка* $\|u_i(t)\| \leqslant \gamma_1$; *при каждом* $j \in M_i$, $i=\overline{1,3}$, *справедливо включение* $w_j(t_0,u_i) \in \Phi_i$; *для векторов* $\zeta_i := \sum_{j\in M_i} w_j(t_0,u_i) \in \Phi_i$, $i=\overline{1,3}$, *имеют место неравенства* $\|\zeta_i\| \geqslant \ell(\varphi)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант Ф10М-032).

Литература. 1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. **2.** Тонков Е.Л. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, №10. С. 1804–1813.