АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ФУНКЦИОНАЛАМИ ЛЯПУНОВА — БОГДАНОВА

В. Т. Борухов (Минск, Беларусь)

Отображение $\lambda : X \to \Lambda$ (X — векторное пространство, Λ — полное линейно упорядоченное множество) называется функционалом Ляпунова — Богданова (Л.-Б.), если выполнены условия: $\lambda(cx) \leqslant \lambda(x)$, $\lambda(x+y) \leqslant \max\{\lambda(x), \lambda(y)\}$, $\forall x, y \in X$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Пусть λ -— функционал Л.-Б. Рассмотрим множества Лебега $\tilde{X}_{\lambda d} = \{x \mid \lambda(x) \leqslant d\}$, $\acute{X}_{\lambda d} = \{x \mid \lambda(x) < d\}$ и максимальное λ–подпространство [1] $H_\lambda = \bigoplus\limits_{d \in R(\lambda)} H_{\lambda d}$, где $R(\lambda)$ — область значений λ, подпространство $H_{\lambda d}$ удовлетворяет условию $\tilde{X}_{\lambda d} = \acute{X}_{\lambda d} \bigoplus H_{\lambda d}$ $\forall d \in R(\lambda)$.

Введем обозначение x_{d_i}, означающее, что $x_{d_i} \in H_{\lambda d_i} (i \in \{0, 1, \dots\})$, и определим асимптотическое разложение вектора $x \in X$. Пусть $\lambda(x) = d_0$, тогда существует разложение $x = x_{d_0} + x_1$, где $x_1 \in \acute{X}_{\lambda d_0}$. Далее, $x_1 = x_{d_1} + x_2$, где $d_1 = \lambda(x_1), x_2 \in \in \grave{X}_{\lambda d_1}$. Итерируя процедуру, получим формальное представление вектора x,

$$x \simeq x_{d_0} + x_{d_1} + \ldots (d_0 > d_1 > \ldots). \tag{1}$$

Отметим однозначность представления (1).

Определение. Представление (1) назовем асимптотическим разложением вектора x относительно пары (λ, H_λ).

Если $x \in H_\lambda$, то будем говорить, что асимптотическое разложение (1) тривиально. Для существования нетривиальных разложений необходимо и достаточно, чтобы функционал Л.-Б. λ был нефундированным [1] и выполнялось строгое включение $H_\lambda \subset X$.

Пусть $A(x) := \{y \simeq y_{m_0} + y_{m_1} + \ldots \mid y_{m_i} = x_{d_i} \forall i \in \{0, 1, \ldots\}\}$ — множество векторов асимптотически равных x, $\{y_{d_i}\}^*$ — множество векторов, имеющих заданное нетривиальное асимптотическое разложение $y_{d_0} + y_{d_1} + \ldots$ относительно пары (λ, H_λ).

Теорема 1. *Если* (1) *нетривиальное асимптотическое разложение, то* $A_x = x + \tilde{X}_{\lambda d_\infty}$, *где* $d_\infty := \inf\{d_i\}$.

Теорема 2. $\{y_{d_i}\}^* = \bigcap_{i=\overline{0,\infty}} (y_{d_0} + \ldots + y_{d_i} + \hat{X}_{\lambda d_i})$.

Асимптотическое разложение (1) можно переформулировать в терминах базиса Ляпунова [1] подпространства H_λ. В таком констексте базисы Ляпунова можно рассматривать как обобщение понятия асимптотической шкалы (см., напр., [2]). Абстрактная версия асимптотических разложений иллюстрируется [1] примерами из анализа и теории дифференциальных уравнений.

Литература. 1. Борухов В.Т. // Дифференц. уравнен. 2007. Т. 43, № 8. С. 1019–1028. **2.** Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., 1962.