ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ВЫХОДОВ

П. А. Балахнин, Г. А. Зеленков, Н. В. Зубов, М. В. Стрекопытова
(Санкт-Петербург, Россия)

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему наблюдения

$$X_{k+1} = AX_k, \quad Y_k = CX_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$X_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n})^\top, \quad Y_k = (y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_r})^\top, \tag{1}$$

где A и C — постоянные матрицы размера $n \times n$ и $r \times n$ соответственно, $Y_k = (y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_r})^\top$ — вектор наблюдений (выходы системы).

Поставим задачу поиска минимального числа p выходов, при которых открытая система

$$X_{k+1} = AX_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad X_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})^\top, \tag{2}$$

может быть сделана полностью наблюдаемой путем выбора соответствующей матрицы C размера $p \times n$ полного ранга, т. е. задачу структурной минимизации системы наблюдения. Полная наблюдаемость означает, что по значениям векторов наблюдений $Y_k \, (k = \overline{0, n})$ можно восстановить начальное положение системы (2) X_0 [2].

Определение. Назовем характеристикой полной наблюдаемости системы (1) минимальное число p выходов, при которых открытая система (2) может быть сделана наблюдаемой путем выбора соответствующей матрицы C размера $p \times n$ полного ранга.

Теорема. *Характеристика наблюдаемости матрицы A равна p, где $p = \max\limits_{i=\overline{1,k}} p_i$ (p_i — число линейно независимых собственных векторов, соответствующих различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, k})$ матрицы A), т. е. всегда можно выбрать p линейно независимых вещественных векторов $C_1, \ldots, C_p$, являющихся строками матрицы C так, что система (1) будет наблюдаемой* [1].

Доказательство теоремы целиком опирается на тот факт, что если величина p для матрицы A является максимальным числом линейно независимых собственных векторов, соответствующих различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, k})$ этой матрицы, то всегда можно выбрать p линейно независимых вещественных векторов $C_1, \ldots, C_p$, являющихся столбцами матрицы C, так, что ранг матрицы $V^\top = [C^\top, A^\top C^\top, \ldots, (A^{n-1})^\top C^\top]$ равен n. Если же ранг матрицы C меньше p, то система (1) не является наблюдаемой.

Нетрудно видеть, что характеристика полной наблюдаемости системы (1) совпадает с максимальной геометрической кратностью собственных чисел матрицы A.

Следствие. Если характеристический многочлен матрицы A совпадает с его минимальным многочленом, то система (1) может быть сделана наблюдаемой с помощью скалярной системы наблюдения [1].

Литература. 1. Зубов А. В., Дикусар В. В., Зубов Н. В. // Тр. ИСА РАН: Динамика неоднородных систем. М.: ЛКИ, 2007. Т. 31(2). С. 34–43. **2.** Теряев Е.Д., Шамриков Б.М. Цифровые системы и поэтапное адаптивное управление. М.: Наука, 1999.