КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. В. Шкут (Мозырь, Беларусь)

Система

$$\frac{dx}{dt} = P_1(x,y) + P_3(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_1(x,y) + Q_3(x,y), \tag{1}$$

где $P_i(x,y)$ и $Q_i(x,y)$ — однородные полиномы i-й степени с действительными коэффициентами, рассматривается при условии, что кривая $w(x,y) \equiv x^3 - xy + px + q = 0$, $4p^3 + 27q^2 > 0$, $pq \neq 0$, является ее частным интегралом.

Теорема. *Для того чтобы кривая* $w(x,y) = 0$ *была частным интегралом системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы система* (1) *имела вид:*

$$\frac{dx}{dt} = 2pqx + 3qx^3 + px^2y, \quad \frac{dy}{dt} = -(2p^3 + 9q^2)x - 5pqy - 2p^2x^3 + 6qx^2y + 2pxy^2. \tag{2}$$

В конечной части плоскости система (2) имеет особые точки:

$$(0,0), \quad \Big(x_1 = \frac{3q}{p}, y_1 = -\frac{2p^3 + 27q^2}{3p^2}\Big),$$

$$\Big(x_{2,3} = \pm\sqrt{-p}, y_{2,3} = \pm\frac{q}{\sqrt{-p}}\Big), \quad \Big(x_4 = -\frac{3q}{p}, y_4 = \frac{2p^3 + 27q^2}{3p^2}\Big).$$

В бесконечной части плоскости система (2) имеет особые точки:

$$\Big(\frac{-3q \pm \sqrt{9q^2 + 8p^3}}{2p}, 0\Big) \text{ и «концы» оси } Oy.$$

Исследование особых точек показывает, что если:

	$(0,0)$	(x_1,y_1)	$(x_{2,3},y_{2,3})$	(x_4,y_4)	$(u_{1,2},0)$	«концы» Oy
$-4p^3/27 < q^2 < -8p^3/9$	ч.с.	ч.с.	у, у	ч.с.	—	инд. +2
$q^2 = 8p^3/9$	ч.с.	ч.с.	у, у	ч.с.	с-у	инд. +2
$q^2 > -8p^3/9$	ч.с.	ч.с.	у, у	ч.с.	у, ч.с.	инд. +2
$p > 0$	ч.с.	у	—	у	ч.с., ч.с.	инд. +2

где ч.с. — четырехсепаратрисное седло, у — узел, с-у — седло-узел, то предельных циклов система (2) не имеет. Построены возможные качественные картины поведения траекторий системы (2) в круге Пуанкаре.