ЦЕНТРЫ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С 27-Ю ПАРАМЕТРАМИ

А. П. Садовский, Т. В. Щеглова (Минск, Беларусь)

Рассматривается система типа систем Льенара

$$x' = yP_0(x), y' = -x + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3, \tag{1}$$

где $P_0(x) = 1 + \sum_{i=1}^{8} c_i x^i$, $P_2(x) = \sum_{i=0}^{7} a_i x^i$, $P_3(x) = \sum_{i=0}^{10} b_i x^i, a_i, b_j, c_k \in \mathbb{C}$, $i = \overline{0,7}$, $j = \overline{0,10}$, $k = \overline{1,8}$.

Из равенства нулю первых четырех фокусных величин системы (1) следует выполнение соотношений

$$P_3(x) = xQ(x), Q'(x)P_0 + 3Q(x)P_2(x) = xR(x), \quad 3R'(x)Q(x) - 5R(x)Q(x) = xS(x),$$

где $Q(x) = \sum_{i=1}^{10} b_i x^{i-1}$, $R(x)$, $S(x)$ — полиномы.

Пусть $R^3(x)/Q^5(x) \equiv \mathrm{const}$ или $P_0(x)S(x)/R^2(x) \equiv \mathrm{const}$. Тогда начало координат $O(0,0)$ системы (1) является центром по теореме Черкаса. В случае $R^3(x)/Q^5(x) \neq \mathrm{const}$ и $P_0(x)S(x)/R^2(x) \neq \mathrm{const}$ особая точка $O(0,0)$ системы (1) является центром тогда и только тогда, когда существуют рациональная функция $\varphi(x)$ $(\varphi(0) = \varphi'(0) = 0)$ и рациональные функции $f(z), g(z)$, для которых выполнены соотношения

$$R^3(x)/Q^5(x) \equiv f(\varphi(x)), \quad P_0(x)S(x)/R^2(x) \equiv g(\varphi(x))$$

либо

$$R^3(x)/Q^5(x) \equiv f(\varphi(x)), \quad \frac{P_0^3(x)(\varphi'(x))^3}{x^3 Q^2(x)} \equiv v(\varphi(x)), \tag{2}$$

где $v(z)$ — рациональная функция [1].

Пусть функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi = \frac{x^2(1 + h_1 x)}{1 + h_2 x + h_3 x^2 + h_4 x^3},$$

где $h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathbb{C}$. Из соотношений (2) найдены 22 неприводимые компоненты многообразия центра системы (1). Например, три из них имеют вид $\mathbb{V}(J_k)$, $k = \overline{1,3}$, где

$J_1 = \langle 56a_0^3 + 18a_0a_1 + 9a_2 - 9a_0c_2, 81a_4 - 1120a_0^5 - 120a_0^3a_1 + 108a_0a_3 + 270a_0^3c_2 - 81a_0c_4, 7616a_0^7 + 288a_0^5a_1 - 216a_0^3a_3 + 486a_0a_5 + 729a_6 - 2160a_0^5c_2 + 972a_0^3c_4 - 729a_0c_6, b_0, 3a_0b_1 + b_2, 21a_0b_3 - 56a_0^3b_1 + 9b_4, 224a_0^5b_1 - 70a_0^3b_3 + 45a_0b_5 + 27b_6, 336a_0^5b_3 - 1088a_0^7b_1 - 180a_0^3b_5 + 243a_0b_7 + 243b_8, 1385a_0^8b_1 - 427a_0^6b_3 + 225a_0^4b_5 - 243a_0^2b_7 + 729b_9, 1395a_0^7b_3 - 4529a_0^9b_1 - 729a_0^5b_5 + 729a_0^3b_7 + 19683b_{10}, 3a_0 + c_1, 21a_0c_2 - 56a_0^3 + 9c_3, 224a_0^5 - 70a_0^3c_2 + 45a_0c_4 + 27c_5, 336a_0^5c_2 - 1088a_0^7 - 180a_0^3c_4 + 243a_0c_6 + 243c_7, 7936a_0^8 - 2448a_0^6c_2 + 1296a_0^4c_4 - 1458a_0^2c_6 + 6561c_8\rangle$,

$J_2 = \langle 15a_0^3 + 4a_0a_1 + 2a_2 - 2a_0c_2, 3a_0^3c_2 - 15a_0^5 - a_0^3a_1 + a_0a_3 + a_4 - a_0c_4, 17a_0^7 + 4a_6 - 4a_0^5c_2 + 2a_0^3c_4 - 4a_0c_6, a_7, b_0, 3a_0b_1 + b_2, 2a_0b_3 - 5a_0^3b_1 + b_4, 3a_0^5b_1 - a_0^3b_3 + a_0b_5 + b_6, b_8, b_9, b_{10}, 7a_0 + 2c_1, 10a_0c_2 - 35a_0^3 + 4c_3, 21a_0^5 - 5a_0^3c_2 + 3a_0c_4 + 2c_5, 4a_0^5c_2 - 17a_0^7 - 2a_0^3c_4 + 4a_0c_6 + 8c_7, c_8\rangle$,

$J_3 = \langle a_0, a_2, 3a_4 + 2a_3c_1, 3a_6 + 4a_5c_1, 9a_7 - 4a_5c_1^2, b_0, b_2, 3b_4 + 2b_3c_1, 3b_6 + 4b_5c_1, 9b_8 + 18b_7c_1 - 8b_5c_1^3, 27b_9 - 36b_7c_1^2 + 16b_5c_1^4, 243b_{10} + 72b_7c_1^3 - 32b_5c_1^5, 3c_3 - 2c_1^3 - c_1c_2, 3c_1c_4 - 8c_1^5 - 4c_1^3c_2 + 9c_5, 416c_1^6 + 208c_1^4c_2 + 78c_1^2c_4 + 27c_6, 27c_7 - 448c_1^7 - 224c_1^5c_2 - 84c_1^3c_4, 128c_1^8 + 64c_1^6c_2 + 24c_1^4c_4 + 27c_8\rangle$.

Литература. 1. Садовский А.П. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009.