

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

*С. В. Rogozin, М. В. Дубатовская (Минск, Беларусь)*

В работе рассматривается установившийся потенциальный тепловой поток в двумерной гетерогенной среде (композиционном материале), геометрически описываемой комплексной плоскостью, разделенной на части  $n$  софокусными эллипсами :

$$L_k = \left\{ x = \left( r_k \sqrt{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}}{r_k} \right) \cos \theta, y = \left( r_k \sqrt{\alpha} - \frac{\sqrt{\alpha}}{r_k} \right) \sin \theta \right\},$$

$$0 < \alpha < 1, \quad 1 < r_1 < \dots < r_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Аналитические методы исследования эффективной проводимости композиционных материалов изложены в [1] (см., также [3]).

Математическая модель рассматриваемого теплового поля представляет собой систему краевых задач типа задачи  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения для уравнения Лапласа в многосвязной эллиптической области. С помощью метода конформных отображений эта система задач сводится к семейству интегральных уравнений на римановой поверхности специального вида (аналогичная система предложена в [2]). Вычисление интегралов в этих уравнениях сводит это семейство к семейству функциональных уравнений.

**Теорема.** *Формулы эффективной проводимости рассматриваемой среды имеют вид:*

$$\lambda^x - i\lambda^{xy} = \frac{R^2}{\pi\alpha(R^4 - 1)} \left( \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi} \left| 1 - \frac{\alpha}{w^2} \right|^2 d\xi d\eta + \int_{A_{n+1}(R)} \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \xi} \left| 1 - \frac{\alpha}{w^2} \right|^2 d\xi d\eta \right),$$

$w = \xi + i\eta$ ,  $A_1 = \{w : \sqrt{\alpha} < |w| < r_1\sqrt{\alpha}\}$ ,  $A_k = \{w : r_{k-1}\sqrt{\alpha} < |w| < r_k\sqrt{\alpha}\}$ ,  $k = 2, \dots, n$ ,  $A_{n+1}(R) = \{w : 1 < |w| < R\sqrt{\alpha}\}$ ,  $\Phi_k(w) = \phi_k(w) + \phi_k\left(\frac{\alpha}{w}\right)$ ,  $\phi_k$  — решения соответствующего семейства функциональных уравнений.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ, проект Ф10МС-024.

**Литература.** 1. Mityushev V.V., Pesetskaya E.V., Rogosin S.V. / Ch. 5 in: "Thermal Properties of Cellular and Porous Materials" (A. Öchsner, G. Murch, and M. de Lemos eds.). Amsterdam: WILEY-VCH, 2008. P. 124–167. 2. Mityushev V.V. // Proc. R. Soc. A. 2009. Vol. 465. P. 2991–3010. 3. Обносов Ю.В. Краевые задачи теории гетерогенных сред: многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка. Казань: Казанский гос. ун-т, 2009.