ОБ ОДНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

О. Н. Парманчук, В. М. Пецевич (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$x'^2 = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + y(b_2x^2 + b_1x),$$

$$y'^2 = c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 + x(d_3y^3 + d_2y^2 + d_1y + d_0), \tag{1}$$

где $|b_2| + |b_1| \neq 0$, $|d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| \neq 0$, $|c_3| + |d_3| \neq 0$, a_i, b_j, c_k, d_k, $i = \overline{0,2}$, $j = \overline{1,2}$, $k = \overline{0,3}$, — функции аналитические по t.

Найдем необходимые условия, при которых система (1) не имеет подвижных критических особых точек. Из (1) для компоненты x построим уравнение

$$\Big(2(b_2x^2 + b_1x)x'x'' - (2b_2x + b_1)x'^3 - (b_2'x^2 + b_1'x)x'^2 - (b_2x^4 + 2b_1x^3 - (a_1b_2 - a_2b_1)x^2 -$$

$$-2a_0b_2x - a_0b_1)x' + b_2'x^5 + (a_2b_2' - a_2'b_2 + b_1')x^4 + (a_1b_2' - a_1'b_2 + a_2b_1' - a_2'b_1)x^3 +$$

$$+(a_0b_2' - a_0'b_2 + a_1b_1' - a_1'b_1)x^2 + (a_0b_1' - a_0'b_1)x\Big)^2 = B_3x'^6 + B_2x'^4 + B_1x'^2 + B_0, \tag{2}$$

где B_n, $n = \overline{0,3}$, — полиномы по x, однозначно определяемые через коэффициенты системы. Требуя выполнения необходимых условий отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнения (2), согласно лемме из [1], получим, что с помощью линейных преобразований система (1) примет вид

$$x'^2 = x(x + y)(x + a), \quad y'^2 = (x + y)(p_3y^2 + p_2y + p_1), \tag{3}$$

где $p_3 \neq 0$, p_i, a, $i = \overline{1,3}$ — аналитические по t функции. Из (3) для компоненты y построим уравнение

$$\Big(2(p_3y^2+p_2y+p_1)y''-(2p_3y+p_2)y'^2-(p_3'y^2+p_2y+p_1')y'-(p_3y^2+p_2y+p_1)^2\Big)^2 =$$

$$= (p_3y^2+p_2y+p_1)\Big(y'^4-(2y-a)(p_3y^2+p_2y+p_1)y'^2+y(y-a)(p_3y^2+p_2y+p_1)^2\Big). \tag{4}$$

Далее, применяя метод малого параметра, метод сравнения с классическими уравнениями P-типа для уравнений (2) и (4), получим, что справедлива

Теорема. *Для того чтобы система* (1) *обладала P-свойством необходимо, чтобы она линейным преобразованием x, y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к виду*

$$x'^2 = x(x + y)(x + M), \quad y'^2 = (x + y)(Ky^2 + H_2y + H_1), \tag{5}$$

где $K \in \{1/4, 1, 4\}$, M, H_1, H_2 — произвольные постоянные.

Заметим, что, к примеру, при $K = 1$ и $H_1 = H_2^2/4$ решения системы (5) обладают свойством Пенлеве.

Литература. 1. Березкина Н.С., Мартынов И.П., Пронько В.А. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 4.