О ФУНКЦИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМОЙ ГАМИЛЬТОНА ВОСЬМОГО

В.И. Мататов, С.В. Пенталь, Н.В. Реут (Минск, Беларусь)

Пусть гамильтониан некоторой системы имеет вид $H = F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, где

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_2 + \beta_0}, \quad \varphi_2 = \frac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_0}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0}, \quad \varphi_3 = \varepsilon_1 (x_3)^2 + \varepsilon_2 (y_3)^2, \quad \varphi_4 = \omega_1 (x_4)^2 + \omega_2 (y_4)^2,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \omega_2$ — комплексные постоянные, F — голоморфная функция своих аргументов. Соответствующая система Гамильтона будет такой:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{-\Delta_1 x_1 + \alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2}{(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0)^2}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{-\Delta_2 x_2 + \gamma_2 \delta_0 - \gamma_0 \delta_2}{(\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0)^2},$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_3} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_3} 2\varepsilon_2 y_3, \quad \frac{dx_4}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_4} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_4} 2\omega_2 y_4,$$

$$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{-\Delta_1 y_1+\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1}{(\beta_1 x_1+\beta_2 y_1+\beta_0)^2},\quad \frac{dy_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\frac{-\Delta_2 y_2+\gamma_1\delta_0-\gamma_0\delta_1}{(\delta_1 x_2+\delta_2 y_2+\delta_0)^2},$$

$$\frac{dy_3}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_3}2\varepsilon_1 x_3,\quad \frac{dy_4}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_4}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_4}2\omega_1 x_4,$$

где $\Delta_1=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$, $\Delta_2=\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1$, $t\in\mathbb{C}$, $x_1,\ldots,y_4\in\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Будем исследовать характер подвижных особых точек решений автономной системы Гамильтона (1). С помощью линейных преобразований искомых функций промежуточные аргументы φ_1, φ_2 можно привести к виду $\widetilde{\varphi_1}=\frac{\alpha_1 X_1+\alpha_2 Y_1}{\beta_1 X_1+\beta_2 Y_2}$, $\widetilde{\varphi_2}=\frac{\gamma_1 X_2+\gamma_2 Y_2}{\delta_1 X_2+\delta_2 Y_2}$. Далее показывается, что система $\dot{X}_1=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial Y_1},\ldots,\dot{Y}_4=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial X_4}$ имеет первые интегралы вида $\frac{X_1}{Y_1}=c_1$, $\frac{X_2}{Y_2}=c_2$, где c_1,c_2 — произвольные постоянные. С использованием этого факта доказана теорема.

Теорема 1. *Если хотя бы один из определителей* $\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\beta_1&\beta_2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}\gamma_1&\gamma_2\\\delta_1&\delta_2\end{vmatrix}$ *не равен нулю, то решения системы* (1) *имеет в* $\mathbb{C}$ *подвижные точки ветвления второго порядка.*

Теорема 2. *Если определители* $\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\beta_1&\beta_2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}\gamma_1&\gamma_2\\\delta_1&\delta_2\end{vmatrix}$ *равны нулю, то решения системы* (1) *не имеет в* $\mathbb{C}$ *никаких подвижных особых точек.*