УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н. О. Седова (Ульяновск, Россия)

Рассматриваются условия локальной и глобальной устойчивости, асимптотической устойчивости и стабилизируемости для системы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

где $t \in R^+ = [0, +\infty)$, $x(t)$ – вектор n-мерного действительного пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|$, x_t – элемент (банахова) пространства $C(n) = C([-r, 0], R^n)$ с супремум-нормой $\|\cdot\|$, определяемый формулой $x_t(s) = x(t+s)$ для $s \in [-r, 0]$, $r > 0$ – величина запаздывания. Предполагается, что $f(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$, так что уравнение (1) имеет нулевое решение. Кроме того, считаем, что функционал f непрерывен, локально липшицев и для каждого числа $q > 0$ существует неубывающая функция $\mu_q(u)$, $\mu_q(0) = 0$, такая, что для любого непрерывного отображения $u : [a, b] \to \bar{C}_q(n)$ и любых $t_1, t_2 \in$

$[a, b]$ выполняется неравенство:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s))\, ds \right| \leqslant \mu_q(|t_2 - t_1|).$$

Использование теорем прямого метода со знакопостоянными функционалами и функциями [1,2] позволяет получить условия устойчивости и асимптотической устойчивости, а также стабилизации нулевого решения уравнения (1), которые оказываются более эффективными по сравнению с традиционными для многих частных случаев уравнения (1). В докладе рассмотрены два специальных вида уравнения (1), активно исследуемые в современной литературе и широко применяемые в приложениях:

1) треугольная система, описываемая парой уравнений:

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x_t) + g(t, x_t, y_t), \tag{2a}$$

$$\dot{y}(t) = f_2(t, y_t). \tag{2b}$$

Здесь x и y – векторы размерностей n и m соответственно, а x_t и y_t – элементы пространств $C(n)$ и $C(m)$. Предполагается, что $f_2(t, 0) = 0$, $f_1(t, 0) = g(t, \varphi_1, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$, $\varphi_1 \in C(n)$, так что система (2) имеет нулевое положение равновесия, а система $(2a)$ при отсутствии взаимосвязи $(y(t) \equiv 0)$ принимает вид

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x_t). \tag{2a_0}$$

Для системы (2) предлагаются достаточные условия локальной и глобальной асимптотической устойчивости, в частности, изучается вопрос о наследовании свойств устойчивости подсистем $(2a - 0)$ и $(2b)$ системой (2) (см. [3]).

2) система, описываемая уравнением $x^{(n)}(t) = u(t)$, и ее обобщение вида:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_i(t) & = & x_{i+1}(t) + f_i(t, x_{1t}, \ldots, x_{it}),\ i = 1, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n(t) & = & u(t) + f_n(t, x_{1t}, \ldots, x_{nt}). \end{array} \tag{3}$$

Для этой системы использование знакопостоянного функционала и индукции по n позволяет построить стабилизирующее управление в виде функции от $(t, x_{1t}, \ldots, x_{nt})$.

В качестве примеров получены достаточные условия устойчивости для ряда моделей математической биологии, а также рассмотрены задачи стабилизации для механических систем с неустойчивым равновесием, описание динамики которых сводится к уравнениям вида (2) и (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №08-01-00741.

Литература

1. Андреев А. С. *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений.* Ульяновск: УлГУ, 2005.

2. Седова Н. О. *Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений* // Мат. заметки. 2005. Т.8, №3. С. 468–472.

3. Седова Н. О. *Глобальная асимптотическая устойчивость и стабилизация в нелинейной каскадной системе с запаздыванием* // Изв. вузов. Математика. 2008. №11. С. 68–79.