

О РЕШЕНИЯХ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. В. ЦЕГЕЛЬНИК (МИНСК, БЕЛАРУСЬ)

Рассматривается система нелинейных уравнений в частных производных [1 - 3]

$$\begin{aligned}\varphi_t + 3(\varphi_{xx} + u\varphi) &= 0, \\ \psi_t - 3(\psi_{xx} + u\psi) &= 0, \\ u_t + 6(\varphi\psi)'_x &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

моделирующая процессы взаимодействия и распространения волн в плазме. В (1) u , φ , ψ — неизвестные функции независимых переменных x , t .

Введением новой независимой переменной $z = x + t$ система уравнений в частных производных преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi + 3\varphi'' + 3u\varphi &= 0, \\ \psi - 3\psi'' - 3u\psi &= 0, \\ u' + 6(\varphi\psi)' &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

в которой $(')$ и $(''')$ обозначают производные первого и второго порядков соответственно по переменной z . Решения $u(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $z = x + t$ будем называть решениями типа бегущей волны системы (1).

Система (2) имеет два первых интеграла

$$u + 6\varphi\psi = C_1, \quad (3)$$

$$\varphi\psi + (\varphi'\psi - \varphi\psi') = C_2, \quad (4)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Соотношения (3), (4), а также первое уравнение системы (2) позволяют получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция φ

$$(3C_1 - 18C_2)\varphi^2 + (1 + 18C_1)\varphi\varphi' + 9\varphi'^2 + 27\varphi'\varphi'' - 9\varphi\varphi''' = 0. \quad (5)$$

С помощью подстановки $p(z) = \varphi'\varphi^{-1}$ уравнение (5) допускает понижение порядка

$$p'' - 2p^3 - p^2 - \frac{1 + 18C_1}{9}p - \frac{C_1 - 6C_2}{3} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет первый интеграл

$$p'^2 - p^4 - \frac{2}{3}p^3 - \frac{1 + 18C_1}{9}p^2 + \frac{2(6C_2 - C_1)}{3}p - C_3 = 0, \quad (7)$$

где C_3 — постоянная интегрирования.

Решение уравнения (7) может быть представлено в терминах эллиптических функций Якоби [4].

Литература

1. Kikuchi T., Ikeda T., Kakei S. *Similarity reduction of the modified Yajima - Oikawa equation, preprint* (arXiv: <http://xxx.lanl.gov.nlin/0304024>).
2. Yajima N., Oikawa M. *A class of exactly solvable nonlinear evolution equations* // Prog. Theor. Phys. 1975. Vol. 54, no. 5. P. 1576–1577.
3. Yajima N., Oikawa M. *Formation and interaction of sonic-Langmuir solutions* // Prog. Theor. Phys. 1976. Vol. 56. P. 1719–1739.
4. Уиттекер Э. И., Ватсон Дж. Н. *Курс современного анализа*. В двух частях. М.: Едиториал УРСС, 2006.