ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

В. А. Треногин (Москва, Россия)

Рассматривается ДУ в банаховом пространстве X

$$\dot{x} = Bx + R(x).$$

Пусть выполнены следующие предположения, (см.[1])

I. B – замкнутый линейный оператор с плотной в X областью определения D, являющийся производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ класса C_0

II. $R(x)$ определен в окрестности S точки $x = 0$, $R(0) = 0$ и для всех x_1, x_2, принадлежащих S, выполняется следующее специальное условие Липшица($C > 0$,$\alpha > 0$)

$$||R(x_1) - R(x_2)|| \leqslant C max^{\beta}(||x_1||, ||x_2||)||x_1 - x_2||.$$

В этих предположениях $x = 0$ является положением равновесия исходного ДУ. Если полугруппа $U(t)$ является экспоненциально убывающей , то оператор B непрерывно обратим, а положение равновесия $x = 0$ оказывается асимптотически устойчивым (см.[2]-[5], где допускается гельдерова зависимость R от t и даже рост R при $t \to +\infty$).

В [6]-[9] непрерывная обратимость оператора B заменена условием существования полного жорданова набора оператора B простого в том смысле, что длины жордановых цепочек все равны 1.

В данном сообщении требование простоты жорданова набора снимается. Следуя [10], введем проектор P пространства X на корневое подпространство оператора B. Для любого $k \neq 0$ оператор $B - kP$ является непрерывно обратимым.

Лемма. *Пусть существуют постоянные* $M > 0$,$\alpha > 0$ *такие, что*

$$||U(t)x|| \leqslant M\exp(-\alpha t)||x||$$

для любого $x \in (I-P)X$. Тогда оператор $\hat{B} = B - \alpha P$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0 с экспоненциальным убыванием. Данная лемма в применении к ДУ позволяет получить ряд утверждений об устойчивости по Ляпунову его тривиального положения равновесия.

Данное исследование поддержано частично грантами РФФИ 09-01-00586,РФФИ 09-07-00365-а и грантом РФФИ совместно с АН Румынии 07-01-916803-РА-а.

Литература

1. Треногин В. А.*Функциональный анализ.* М.: Наука, 1980.

2. Треногин В. А.*Абстрактные динамические системы и первый метод Ляпунова//* Тезисы международный конференции, посвященной 100-летию С.Н. Никольского, 2005. Изд.РАН. С. 225.

3. Треногин В. А.*Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению как следствие теоремы о неявном операторе//* Доклады академии наук. 2006. Т. 407, № 6. С. 742–746.

4. Trenogin V. A. *First Lyapunov method for the abstract parabolic equation//* World Scientific, 2006. Singapore. PP. 116–123.

5. Trenogin V. A. *Asymptotic stability of trivial solution of differential equation with unbounded linearity in Banach space//* Romai Journal. 2007. Vol. 3, N 1. PP. 207–212.

6. Треногин В. А.*Устойчивость по Ляпунову на основе линейного приближения для ДУ в банаховом пространстве* //Тезисы докладов международной научно-методической конференции Наука в вузах:математика, физика, информатика. М.: РУДН, 2009. С. 227–229,

7. Trenogin V. A.*Two projection methods for investigation of stability of trivial solution of differential equation in Banach space//* Romai Journal, 2009.(in print).

8. Треногин В. А. *Линейное приближение для ДУ в банаховом пространстве и устойчивость по Ляпунову//* Доклады академии наук, 2009. (в печати).

9. Вайнберг М. М., Треногин В. А.*Теория ветвления решений нелинейных уравнений* М.: Наука, 1969.

10. Логинов Б. В., Русак Ю. Б.*Обобщенные жордановы структуры в теории ветвления//* Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Ташкент, 1978. С. 133–148.