ИНТЕГРАЛЬНЫЙ БАЗИС ЯКОБИЕВОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. Ф. Проневич, П. Б. Павлючик (Гродно, Беларусь)

Для якобиевой [1, с. 38] линейной однородной системы в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(x)\,\partial_{x_i} y = 0, \quad j=\overline{1,m}, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \;\; y\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

с линейными неоднородными координатными функциями

$$a_{ji}\colon x\to \sum_{\xi=1}^{n} a_{ji\xi}x_\xi + a_{ji0} \;\;\forall x\in\mathbb{R}^n \quad (a_{ji\xi}\in\mathbb{R},\;\; \xi=\overline{0,n},\;\; i=\overline{1,n},\;\; j=\overline{1,m})$$

рассматривается задача о построении интегрального базиса по частным интегралам.

Размерность базиса первых интегралов системы в частных производных (1) зависит от ее полноты [1, с. 38]. Если система (1) полная (якобиевая), то базис на области из пространства $\mathbb{R}^n$ состоит из $n-m$ функционально независимых первых интегралов [1, с. 50; 2, с. 70]. У неполной системы уравнений в частных производных (1) размерность базиса первых интегралов устанавливается по размерности базиса интегрально равносильной ей полной системе на области нормализации [3].

Для систем в частных производных с полиномиальными координатными функциями в работах [1; 4] рассмотрены возможности нахождения первых интегралов по частным интегралам. Основываясь на этих подходах, спектральным методом построен интегральный базис [5; 6] системы в частных производных с линейными однородными координатными функциями. Используя аналогичные подходы для якобиевой системы уравнений в частных производных (1) построен базис первых интегралов.

В основании спектрального метода построения первых интегралов системы (1) по частным интегралам лежат следующие два утверждения (леммы 1 и 2).

Лемма 1. *Пусть* $\nu\in\mathbb{C}^n$ *есть общий собственный вектор матриц* $A_j=\|a_{j\xi i}\|$ $(\xi,i=\overline{1,n})$, *которому соответствуют собственные числа* λ^j, $j=\overline{1,m}$, *среди которых хотя бы одно, например,* $\lambda^\zeta\neq 0$, $\zeta\in\{1,\ldots,m\}$. *Тогда линейная неоднородная функция* $p\colon x\to \nu x+\mu \;\;\forall x\in\mathbb{R}^n$ $(\mu=\nu a_\zeta/\lambda^\zeta,\; a_\zeta=(a_{\zeta10},\ldots,a_{\zeta n0}))$ *будет частным интегралом системы уравнений в частных производных* (1).

Лемма 2. *Пусть* $\nu\in\mathbb{R}^n$ — *общий собственный вектор матриц* A_j, *которому соответствуют собственные числа* $\lambda^j=0$, $j=\overline{1,m}$, *при условии, что среди чисел* νa_j $(a_j=(a_{j10},\ldots,a_{jn0}))$, $j=\overline{1,m}$, *существует хотя бы одно ненулевое. Тогда условным частным интегралом системы* (1) *будет функция* $p\colon x\to \exp \nu x \;\;\forall x\in\mathbb{R}^n$.

Первые интегралы системы (1) строятся по общим собственным и присоединенным векторам матриц A_j, $j=\overline{1,m}$, с учетом кратности их элементарных делителей.

В случае простых элементарных делителей построение первого интеграла системы в частных производных (1) происходит на основании $m+1$ общих линейно независимых собственных векторов матриц A_j, $j=\overline{1,m}$, которые берутся из множеств:

1) общие вещественные собственные векторы ν^k, которым соответствуют собственные числа λ_k^j, $j=\overline{1,m}$, при условии, что при каждом фиксированном $k=\overline{1,\alpha}$ существует хотя бы одно собственное число $\lambda_k^{j_k}\neq 0$, где $j_k\in\{1,\ldots,m\}$, $k=\overline{1,\alpha}$;

2) общие вещественные собственные векторы ν^θ, которым соответствуют собственные числа

$\lambda_\theta^j = 0,\ j = \overline{1,m}$, при условии, что при каждом $\theta = \overline{\alpha+1, \alpha+\beta}$ среди чисел $\gamma_\theta^j = \nu^\theta a_j,\ j = \overline{1,m}$, существует хотя бы одно отличное от нуля;

3) общие комплексные собственные векторы $\nu^\tau = \overset{*}{\nu}{}^\tau + \widetilde{\nu}^\tau i$ ($\overset{*}{\nu}{}^\tau = \operatorname{Re}\nu^\tau,\ \widetilde{\nu}^\tau = \operatorname{Im}\nu^\tau$), которым соответствуют собственные числа

$\lambda_\tau^j = \overset{*}{\lambda}{}_\tau^j + \widetilde{\lambda}_\tau^j i$ ($\overset{*}{\lambda}{}_\tau^j = \operatorname{Re}\lambda_\tau^j,\ \widetilde{\lambda}_\tau^j = \operatorname{Re}\lambda_\tau^j$), $j = \overline{1,m}$, при условии, что при каждом фиксированном индексе $\tau = \overline{\alpha+\beta+1, \alpha+\beta+\delta}$ существует хотя бы одно существенно комплексное собственное число,

например, $\lambda_\tau^{j_\tau}$, где $j_\tau \in \{1,\ldots,m\}$, $\tau = \overline{\alpha+\beta+1, \alpha+\beta+\delta}$.

Так, например, имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть матрицы* $A_j,\ j = \overline{1,m}$, *имеют общие собственные векторы* 1) – 3) *при* $\alpha+\beta+2\delta = m+1$. *Тогда первым интегралом системы* (1) *будет функция*

$$F\colon x \to \prod_{k=1}^{\alpha} \left|\nu^k x + \mu_k\right|^{h_k} \prod_{\tau=\alpha+\beta+1}^{\alpha+\beta+\delta} \left(P_\tau(x)\right)^{\overset{*}{h}_\tau} \exp\left(\sum_{\theta=\alpha+1}^{\alpha+\beta} h_\theta \nu^\theta x - 2\sum_{\tau=\alpha+\beta+1}^{\alpha+\beta+\delta} \widetilde{h}_\tau \varphi_\tau(x)\right) \ \forall x \in \mathrm{D}F,$$

где функции $P_\tau\colon x \to \left(\overset{*}{\nu}{}^\tau x + \overset{*}{\mu}_\tau\right)^2 + \left(\widetilde{\nu}^\tau x + \widetilde{\mu}_\tau\right)^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_\tau\colon x \to \operatorname{arctg} \dfrac{\widetilde{\nu}^\tau x + \widetilde{\mu}_\tau}{\overset{*}{\nu}{}^\tau x + \overset{*}{\mu}_\tau}$ $\forall x \in \mathrm{D}F$, *вещественные числа* $h_q,\ q = \overline{1, \alpha+\beta}$, $\overset{*}{h}_\tau$ *и* $\widetilde{h}_\tau$, $\tau = \overline{\alpha+\beta+1, \alpha+\beta+\delta}$, *составляют нетривиальное решение линейной системы*

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda_k^j h_k + \sum_{\theta=\alpha+1}^{\alpha+\beta} \gamma_\theta^j h_\theta + 2\sum_{\tau=\alpha+\beta+1}^{\alpha+\beta+\delta} \left(\overset{*}{\lambda}{}_\tau^j \overset{*}{h}_\tau - \widetilde{\lambda}_\tau^j \widetilde{h}_\tau\right) = 0, \quad j = \overline{1,m},$$

а числа $\overset{*}{\mu}_\tau = \dfrac{\overset{*}{\lambda}{}_\tau^{j_\tau} \overset{*}{\nu}{}^\tau a_{j_\tau} + \widetilde{\lambda}_\tau^{j_\tau} \widetilde{\nu}^\tau a_{j_\tau}}{\left(\overset{*}{\lambda}{}_\tau^{j_\tau}\right)^2 + \left(\widetilde{\lambda}_\tau^{j_\tau}\right)^2}$, $\widetilde{\mu}_\tau = \dfrac{\overset{*}{\lambda}{}_\tau^{j_\tau} \widetilde{\nu}^\tau a_{j_\tau} - \widetilde{\lambda}_\tau^{j_\tau} \overset{*}{\nu}{}^\tau a_{j_\tau}}{\left(\overset{*}{\lambda}{}_\tau^{j_\tau}\right)^2 + \left(\widetilde{\lambda}_\tau^{j_\tau}\right)^2}$, $\mu_k = \dfrac{\nu^k a_{j_k}}{\lambda_k^{j_k}}$.

Литература

1. Горбузов В. Н. *Интегралы дифференциальных систем.* Гродно, ГрГУ, 2006.

2. Гюнтер Н. М. *Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных.* Л.; М., ГТТИ, 1934.

3. Горбузов В. Н. *Симметрии многомерных дифференциальных систем с неполной интегрируемостью* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. Сер. 2, 1999. №. 1. С. 26–37.

4. Буслюк Д. В. *Интегралы и последние множители дифференциальных систем в частных производных* // Дифф. уравнения, 1999. Т. 35, №. 3. С. 418–419.

5. Горбузов В. Н., Проневич А. Ф. *Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных* // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru/journal), 2001. no. 3. С. 17–45.

6. Проневич А. Ф. *Интегралы якобиевой системы в комплексной области* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. Сер. 2, 2002. №. 1(9). С. 19–25.