СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Д. К. Потапов (Санкт-Петербург, Россия)

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ рассматривается проблема существования ненулевых решений задачи

$$\tau u(x) = \lambda g(x, u(x)), x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\partial_\nu^r(\Gamma)u(x) = 0, x \in \Gamma, 0 \leqslant r \leqslant p-1, \tag{2}$$

в зависимости от параметра λ. Здесь $\tau = \sum\limits_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant p} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha$ – формальный дифференциальный оператор порядка $2p$ в дивергентной форме, удовлетворяющий неравенству $\sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=p} a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha+\beta} \geqslant \chi|\xi|^{2p}$ $\forall x \in \overline{\Omega}$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$, где постоянная χ положительна и не зависит от x и ξ, функции $a_{\alpha\beta}$ вещественнозначны и имеют непрерывные в $\overline{\Omega}$ частные производные до порядка $|\beta|$ включительно, причем, $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$ в $\overline{\Omega}$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant p$; функция $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$ $\forall u \in \mathbb{R}$, $g_-(x,u) = \varliminf\limits_{\eta\to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u) = \varlimsup\limits_{\eta\to u} g(x,\eta)$ и $|g(x,u)| \leqslant a(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q \geqslant \max\{\frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p}\}$ фиксирована; $\partial_\nu^r(\Gamma)$ – производные в направлении внутренней нормали ν к границе Γ порядка r.

Задаче (1)–(2) сопоставим функционал $J^\lambda(u)$, заданный на пространстве $\mathbf{H}^p_\circ(\Omega)$, следующим образом: $J^\lambda(u) = \frac{1}{2} \sum\limits_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant p} \int\limits_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta u(x) dx - \lambda \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s) ds$. Положим $U = \{u_0 \in \mathbf{H}^p_\circ(\Omega) : \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u_0(x)} g(x,s) dx > 0\}$.

Вариационным методом получены следующие теоремы о существовании луча положительных собственных значений и оценке сверху величины бифуркационного параметра для исследуемой задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) для любого $u \in \mathbf{H}^p_\circ(\Omega)$ $\sum\limits_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant p} \int\limits_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta u(x) dx \geqslant 0$;
2) для почти всех $x \in \Omega$ $g(x,0) = 0$ *и* $|g(x,u)| \leqslant a(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, *где* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \max\{\frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p}\}$ *фиксирована;*
3) найдется $u_0 \in \mathbf{H}^p_\circ(\Omega)$, *для которого* $\int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u_0(x)} g(x,s) ds > 0$;
4) пространство $N(\tau)$ *решений задачи* $\tau u = 0$, $\partial_\nu^r(\Gamma)u(x) = 0$ *ненулевое и*

$$\lim_{u\in N(\tau), \|u\|\to+\infty} \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s) ds = -\infty;$$

либо $N(\tau) = \{0\}$.
Тогда существует

$$0 < \lambda_0 \leqslant \inf_{u_0\in U} \frac{\frac{1}{2} \sum\limits_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant p} \int\limits_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_0(x) D^\beta u_0(x) dx}{\int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u_0(x)} g(x,s) ds}$$

такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ $\inf\limits_{v\in\mathbf{H}^p_\circ(\Omega)} J^\lambda(v) < 0$, *и найдется* $u_\lambda \in \mathbf{H}^p_\circ(\Omega)$ *такое, что*

$$J^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v\in\mathbf{H}^p_\circ(\Omega)} J^\lambda(v). \tag{3}$$

Если дополнительно для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ имеет только прыгающие разрывы, то любое u_λ, удовлетворяющее (3), является ненулевым полуправильным решением задачи (1)–(2).

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия 1), 3), 4) теоремы 1 и дополнительно условия*
1′) для почти всех $x \in \Omega$ $g(x,\cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$ и для некоторой $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q = \max\{\frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p}\}$ $|g(x,u)| \leqslant a(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$;
2′) для почти всех $x \in \Omega$ точки разрыва $g(x,\cdot)$ лежат на плоскостях $u = u_i$, $i \in I$ (I – не более чем счетно) и если $g(x,u_i-) > g(x,u_i+)$, то $g(x,u_i-)g(x,u_i+) > 0$ для любого $i \in I$.
Тогда существует

$$0 < \lambda_0 \leqslant \inf_{u_0 \in U} \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant p}\int\limits_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_0(x) D^\beta u_0(x)dx}{\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u_0(x)} g(x,s)ds}$$

такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ $\inf\limits_{v \in \mathbf{H}^p_\circ(\Omega)} J^\lambda(v) < 0$, и найдется $u_\lambda \in \mathbf{H}^p_\circ(\Omega)$, для которого

$$J^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in \mathbf{H}^p_\circ(\Omega)} J^\lambda(v), \tag{4}$$

и любое u_λ, удовлетворяющее (4), является ненулевым полуправильным решением задачи (1)–(2).

Сформулированные теоремы развивают результаты [1]–[3]. Их доказательство в основном сводится к проверке выполнения условий теоремы 2 из [1] и теоремы 2 из [2].

Литература

1. Павленко В. Н., Потапов Д. К. *О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами* // Сиб. мат. журн., 2001. Т. 42, № 4. С. 911–919.

2. Потапов Д. К. *О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10, 2004. Вып. 4. С. 125–132.

3. Потапов Д. К. *Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями* // Дифференц. уравнения, 2008. Т. 44, № 5. С. 715–716.