

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДЕНЕЖНЫХ НАКОПЛЕНИЙ

Э. Г. ОРУДЖЕВ, Г. А. ГЮЛЬМАМЕДОВА (БАКУ, АЗЕРБАЙДЖАН)

Рассмотрим смешанную задачу с нелокальными граничными условиями

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < t < \infty, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$u(x, t) |_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$L_1(u) = \int_0^l u(x, t) dx = N_0(t), \quad L_2(u) = \int_0^l x u(x, t) dx = K_0(t). \quad (3)$$

Уравнение (1), описывающее плотность распределения семей по денежным накоплениям, выведено в работе [1, стр. 173-179], где поставлена смешанная задача (1)-(3) [1, стр. 194]. Там же отмечено, что эта задача требует исследования проблемы существования и единственности решения.

В данной работе при заданных функциях $f(x, t) \in C^2(\overline{D})$, $D = (0 < t < \infty) \times (0 < x < l)$, $N_0(t), K_0(t) \in C^1(t \geq 0)$, $\varphi(x) \in C(0 \leq x \leq l)$ исследуется принадлежность функции

$u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(D) \cap C(\overline{D})$, которая удовлетворяет уравнению (1) в области D , начальному условию (2) и нелокальным условиям (3) ($u \in C_{x,t}^{2,1}(D)$, если $u(x, t), \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \in C(D)$), и находится выражение для решения этой задачи, определяются условия корректной постановки задачи (1)–(3).

Изменим формулировку краевых условий (3). Для этого сначала записывая

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(x, t) dx &= \int_0^l \left[f(x, t) + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{dN_0(t)}{dt}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l x u(x, t) dx &= \int_0^l x \left[f(x, t) + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{dK_0(t)}{dt},\end{aligned}$$

интегрируя по частям и произведя соответствующие обозначения, вместо нелокальных краевых условий (3), получим следующие условия:

$$\left. \begin{aligned}L_1^{(1)}(u) &= \alpha_{10}u(0, t) + \alpha_{11}u'_x(0, t) + \beta_{10}u(l, t) + \beta_{11}u'_x(l, t) = \psi_1(t), \\ L_2^{(1)}(u) &= \alpha_{20}u(0, t) + \alpha_{21}u'_x(0, t) + \beta_{20}u(l, t) + \beta_{21}u'_x(l, t) = \psi_2(t),\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, i = \overline{1, 2}, j = \overline{0, 1}, \psi_1(t), \psi_2(t)$ выражаются через $l, b, c, N_0(t), \frac{dN_0(t)}{dt}, \frac{dK_0(t)}{dt}$, $\int_0^l x^\alpha f(x, t) dx, \alpha = 0, 1$. Пусть условия (4) независимы. Обозначим через $v(x, t)$ функцию, удовлетворяющую этим условиям. Отыскивая функцию $v(x, t)$ в виде $v(x, t) = v_0(t) + v_1(t)x$, подставляя ее в выражение (4), легко находятся функции $v_0(t), v_1(t)$ (см. [2]).

В задаче (1), (2), (4) сделаем замену $u(x, t) = W(x, t) + v(x, t)$, где W – новая неизвестная функция. Тогда для W получим:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - c \frac{\partial W}{\partial x} + \tilde{f}(x, t), \quad L_1^{(1)}(W) = 0, \quad L_2^{(1)}(W) = 0, \quad W(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad (5)$$

где $\tilde{f}(x, t) = f(x, t) + \left[\frac{1}{2} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right] v(x, t), \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - v(x, 0)$.

По схеме работы [3] смешанной задаче (5) сопоставим две задачи с комплексным параметром λ :

А. Задача Коши для нахождения решения уравнения

$$\frac{2}{b} \frac{dZ}{dt} - \lambda^2 Z = \frac{2}{b} \tilde{f}(x, t), \quad Z(x, 0) = \tilde{\varphi}(x);$$

Б. Спектральная задача нахождения решений уравнения

$$Y'' - \frac{2c}{b} Y' - \lambda^2 Y(x) = h(x), \quad L_1^{(1)}[Y(x)] = 0, \quad L_2^{(1)}[Y(x)] = 0,$$

где $h(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Решение задачи **А** имеет вид:

$$Z(x, t, \lambda) = \tilde{\varphi}(x) e^{\frac{b}{2} \lambda^2 t} + \frac{2}{b} \int_0^t e^{\frac{b}{2} \lambda^2 (t-\tau)} \tilde{f}(x, \tau) d\tau.$$

Решение задачи Б, полагая $Y_1(x, \lambda) = e^{\frac{\varepsilon}{b} + \lambda \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{b^2 \lambda^2} + 1}} x$, $Y_2(x, \lambda) = e^{\frac{\varepsilon}{b} - \lambda \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{b^2 \lambda^2} + 1}} x$, легко строится по формуле

$$Y(x, \lambda, h) = \int_0^l \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} h(\xi) d\xi,$$

где

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1^{(1)}(Y_1) & L_1^{(1)}(Y_2) \\ L_2^{(1)}(Y_1) & L_2^{(1)}(Y_2) \end{vmatrix}, \quad \Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & Y_1(x, \lambda) & Y_2(x, \lambda) \\ L_1^{(1)}(g)_x & L_1^{(1)}(Y_1) & L_1^{(1)}(Y_2) \\ L_2^{(1)}(g)_x & L_2^{(1)}(Y_1) & L_2^{(1)}(Y_2) \end{vmatrix},$$

$g(x, \xi, \lambda) = \pm \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k(x, \lambda) W_{2k}(x, \lambda)}{W(\xi, \lambda)}$, знак $+$ при $x > \xi$, знак $-$ при $x < \xi$; $W(\xi, \lambda)$ - определитель Вронского от $Y_1(\xi, \lambda)$, $Y_2(\xi, \lambda)$; $W_{2k}(\xi, \lambda)$ - алгебраическое дополнение элемента $(2, k)$, $k = \overline{1, 2}$ определителя $W(\xi, \lambda)$.

Теорема 1. *Предположим, что выполняется одно из условий (условия регулярности, см. [4, стр. 73]): 1) $\alpha_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\alpha_{21} \neq 0$; 2) $\alpha_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\alpha_{21} = 0$, $\beta_{11}\alpha_{20} - \alpha_{11}\beta_{20} \neq 0$; 3) $\alpha_{11} = \beta_{11} = \alpha_{21} = \beta_{21} = 0$, $\alpha_{10}\beta_{20} - \beta_{10}\alpha_{20} \neq 0$ и функции $\tilde{f}(x, t)$, $\tilde{f}_x(x, t)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0, l]$. Тогда задача (5) имеет классическое решение, представимое в виде*

$$W(x, t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\nu} \int_{c_{\nu}} \lambda d\lambda \int_0^l \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \left[\tilde{\varphi}(\xi) e^{\frac{\varepsilon}{b} \lambda^2 t} + \frac{2}{b} \int_0^t e^{\frac{\varepsilon}{b} \lambda^2 (t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\tau \right] d\xi,$$

где c_{ν} - простой замкнутый контур, окружающий только один полюс λ_{ν} подынтегральной функции, и сумма по ν распространена на все полюсы.

Литература

1. Ерофеенко В. Т., Козловская И. С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. М: Эдиториал УРСС, 2004.
2. Гюльмамедова Г. А. Исследование уравнений денежных накоплений с нелокальными краевыми условиями. Проблемы прикладной математики. Баку, 2009.
3. Расулов М. Л. Разложение функций в ряд полного интегрального вычета и решения смешанных задач // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 1. С. 42-46.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.