РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА СО СДВИГОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В. Ю. Масталиев, И. Ю. Масталиев (Баку, Азербайджан)

В настоящей работе рассматривается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad D = \{(x,\, y): \ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u(x, b), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{2}$$

$$l_i^{1)}(u) = \alpha_i \left.\frac{\partial^i u\left(x,\, y + \frac{b}{2}\right)}{\partial x^i}\right|_{x=0} + \beta_i \left.\frac{\partial^i u\,(x,\, y)}{\partial x^i}\right|_{x=a} = \varphi_i\,(y)\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{b}{2},\ i = 0,\, 1, \tag{3}$$

$$l_i^{(2)}(u) = \gamma_i \left.\frac{\partial^i u\,(x,\, y)}{\partial x^i}\right|_{x=0} + \delta_i \left.\frac{\partial^i u\left(x,\, y + \frac{b}{2}\right)}{\partial x^i}\right|_{x=a} = \psi_i\,(y)\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{b}{2},\ i = 0,\, 1. \tag{4}$$

Здесь $\alpha_i,\, \beta_i, \gamma_i,\, \delta_i,\ (i = 0,\, 1)$ – постоянные, $\varphi_i(y),\ \psi_i(y), (i = 0,\, 1)$ – заданные функции, а $u(x, y)$ – искомая функция.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1^0. $\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 \neq 0,\ \gamma_0\delta_1 + \gamma_1\delta_0 \neq 0;$

2^0. $A \leqslant 1$ или $A > 1$ и число $\frac{b}{2a\pi}\ln\left(A+\sqrt{A^2-1}\right)$ не является целым, где
$A = \left[(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)(\gamma_0\delta_1+\gamma_1\delta_0)\right]^{-1}\left[2(\alpha_0\alpha_1\gamma_0\gamma_1+\beta_0\beta_1\delta_0\delta_1)-(\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1)(\gamma_0\delta_1-\gamma_1\delta_0)\right]$.
Доказывается теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1^0, 2^0. Тогда краевая задача (1)-(4) имеет единственное классическое решение, представимое формулой*

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underset{\lambda_k^{(1)}}{res}\, \nu\left[y,\,\lambda,\,\omega(x,y,\lambda,\,\varphi_0,\varphi_1,\,\psi_0,\,\psi_1)\right],$$

где $\nu(y,\,\lambda,\,h)$ – является решение задачи

$$\begin{gathered}\frac{d^2\nu}{dy^2}-\lambda^2\nu=-h(y)\,,\\ \nu(0,\,\lambda)=y(b,\,\lambda)=0,\end{gathered}$$

которое при $\lambda=\lambda_k^{(1)}=\frac{k\pi}{b}$, $(k=\pm1,\,\pm2,\,\ldots)$ и $h(y)\in C[0,\,b]$ существует, единственно и аналитично по λ всюду, кроме точек $\lambda_k^{(1)}$, которые являются ее полюсами, а через $\omega(x,y,\,\lambda)=\omega(x,y,\,\lambda,\,\varphi_0,\,\varphi_1,\,\psi_0,\,\psi_1)$ обозначено решение задачи

$$\begin{gathered}\frac{d^2\omega(x,y,\lambda)}{dx^2}+\lambda^2\omega(x,y,\lambda)=0,\\ l_i^{(1)}(\omega)=\varphi_i(y)\,,\ l_i^{(2)}(\omega)=\psi_i(y)\,,(i=0,\,1)\end{gathered}$$

которое существует и единственно при условии 1^0 и $\lambda=\lambda_{kj}^{(2)}$, $(j=1,2;k=\pm1,\,\pm2,\,...)$ где
$\lambda_{kj}^{(2)} = \frac{1}{2ai}\left[\ln_0\left(A+(-1)^j\sqrt{A^2-1}\right)+2k\pi\right]$, *причем, при условии 2^0, это решение оказывается аналитичным по λ в окрестностях точек $\lambda_k^{(1)}$.*

Литература

1. Расулов М. Л. *Метод контурного интеграла.* М.: Наука, 1964.

2. Расулов М. Л. *Применение вычетного метода к решению дифференциальных уравнений.* Баку.: Элм, 1989.