ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

О. Н. Малышева (Минск, Беларусь)

Рассматриваются системы Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \frac{dy}{dt} = -\mu g(x), \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon F(x), \frac{dy}{dt} = -g(x), \tag{2}$$

имеющие малый параметр $\mu > 0, \varepsilon > 0$. При малых μ система (1) может иметь релаксационные предельные циклы, а система (2) при малых $\varepsilon-$ предельные циклы, порождаемые кривыми центра системы (2) при $\varepsilon > 0$. Заменой $y = \varepsilon Y$ и растяжением шкалы времени система (2) переводится в систему (1) с $\mu = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Таким образом, система (2) при больших значениях ε может иметь также и релаксационные предельные циклы. Пусть $g(x) = x$, а $F(x)-$ многочлен степени $2n+1$. Тогда максимальное число релаксационных предельных циклов системы (1) не превышает n также как и число предельных циклов, порождаемых центром [1]. Естественно выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза. *Пусть система (2), в которой $F(x)-$ многочлен степени $2n+1$, имеет максимальное число релаксационных предельных циклов, равное n и такое же число* *предельных циклов, порождаемых кривыми центра. Тогда число предельных циклов системы (2) не зависит от ε и при любом $\varepsilon > 0$ равно n.*

Проверка гипотезы о равенстве числа предельных циклов системы (2) при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon > \mu_0$, где μ_0, ε_0– некоторые числа,осуществляется с помощью построения соответствующих функций Дюлака, не зависящих от ε. В оставшейся области изменения ε, $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \mu_0$ это также можно сделать, построив функцию Дюлака [2], зависящую от параметра ε. Если при $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \mu_0$ число предельных циклов системы (2) равно n, то это означает,что гипотеза справедлива. Для некоторых систем (2) во всех трех областях изменения ε можно построить функции Дюлака.

В докладе предложен набор таких систем (2). Во всех полученных системах методом обратной величины интегрирующего множителя [3] найдена аппроксимация предельных циклов алгебраическими кривыми при малых $\varepsilon > 0$. Функцию $\Psi(x, y)$, которая является обратной величиной интегрирующего множителя системы (2) в области аналитичности, будем искать приближенно в виде многочлена $\Psi(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i(x) y^{m-i}$, $\varphi_i(x)$– многочлены, такие, что функция $\Phi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}(y - \varepsilon F(x)) + \frac{\partial\Psi}{\partial y}(-g(x)) + \varepsilon\Psi F'(x)$ зависит только от x. Для нахождения функций $\varphi_i(x), i = \overline{1, m}$ получим систему дифференциальных уравнений, решив которую функцию Φ находим в виде [4]:

$$\Phi(x, C, \varepsilon) = \Phi_0(x) + \varepsilon\Phi_1(x) + o(\mu),$$

где $\Phi_0(x) = C_1 f_1(x) + C_3 f_3(x) + ...$, $\Phi_1(x) = \widetilde{C}_2 f_2(x) + \widetilde{C}_4 f_4(x) + ...$, $C_j, \widetilde{C}_j$– произвольные постоянные, f_j– известные многочлены, $j = \overline{1, m}$. Далее представим Φ в виде

$$\Phi(x, C, \varepsilon) = \varepsilon(\widetilde{\Phi}_0(x) + \Phi_1(x)) + o(\mu),$$

заменяя $C_1 = \varepsilon\widetilde{C}_1, C_3 = \varepsilon\widetilde{C}_3, ...$ Выделим главную часть Φ по ε и рассмотрим новую функцию $\widetilde{\Phi}(x, \widetilde{C}) = \widetilde{\Phi}_0(x) + \Phi_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \widetilde{C}_j \widetilde{\Phi}_j(x)$, тогда функция Ψ примет вид $\Psi = \Psi(x, y, \widetilde{C}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \widetilde{C}_j \widetilde{\Psi}_j(x, y) + o(\mu)$, $\Psi_j(x, y)$– известные многочлены. Предполагая, что предельные циклы системы (2), окружающие начало $(0, 0)$, располагаются в полосе $p \leqslant x \leqslant q, p < 0, q > 0$, фазовой плоскости xOy, решаем задачу оптимизации

$$L \to min, |\sum_{j=1}^{m-1} \widetilde{C}_j \widetilde{\Phi}_j(x) - \widetilde{\Phi}_m(x)| \leqslant L, \quad x \in [p, q]. \tag{3}$$

Задачу (3) можно решать приближенно, заменив ее сеточной задачей на равномерной сетке узлов $x_i \in [p, q], i = \overline{1, N_0}$ переменной x

$$L \to min, |\sum_{j=1}^{m-1} \widetilde{C}_j \widetilde{\Phi}_j(x_i) - \widetilde{\Phi}_m(x_i)| \leqslant L. \tag{4}$$

Задача (4) сводится к стандартной задаче линейного программирования, решив которую, найдем решение (C^*, L^*) задачи (4) приближенно равное решению $(\widetilde{C}^*, \widetilde{L}^*)$ задачи (3). Если $L^* \approx \widetilde{L}^*$ достаточно мало, то в рассматриваемой полосе овалы кривой $\Psi(x, y, C^*) = 0$, будут аппроксимировать предельные циклы системы (2).

Справедливы теоремы.

Теорема 1. *Система*

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon(-x^5 + 3x^3 + \frac{x^2}{4} - x), \frac{dy}{dt} = -x$$

при любом $\varepsilon > 0$ имеет точно два предельных цикла.

Гипотезу можно рассматривать и при $g(x) \neq x$.

Теорема 2. *Система*

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon(x^3 - x), \frac{dy}{dt} = -x(1 + x^2)$$

имеет при всех $\varepsilon > 0$ точно один предельный цикл.

Литература

1. Zhang Zhifen and others. *Qualitative Theory of Differential Equations* // Translations of Mathemat. Monographs, vol. 101, American Math. Soc., Providence, RE, 1992.

2. Черкас Л. А., Шевцов И. Л. *Методы вспомогательных функций Дюлака и Пуанкаре оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости* // Доклады БГУИР. 2004. № 1. С. 115–125.

3. Черкас Л. А., Малышева О. Н. *Алгебраические методы аппроксимации предельных циклов автономных систем на плоскости* // Весник Гродн.ГУ. Сер. 2. 2009. № 1(77). С. 44–50.

4. Малышева О. Н. *Аппроксимация предельных циклов при возмущении центра системы Льенара* // Еругинские чтения XIII: Тезисы докладов Междунар. науч. конф. 2009. С. 40–41.