СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ НАКЛОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Ф. Е. Ломовцев (Минск, Беларусь)

В прямоугольнике $G =]0,T[\times]0,l[$ переменных $t \in]0,T[$ и $x \in]0,l[$ изучена корректность в слабом смысле уравнения колебаний струны

$$u_{tt} - (a_0(t,x)u_x)_x + (a_1(t,x)u_x)_t + b_2(t,x)u_x + b_1(t,x)u_t + b_0(t,x)u = f(t,x), \qquad (1)$$

где нижние интексы t и x функций обозначают их частные производные по t и x, при граничных

$$[u_t + \beta_0(t)u_x - \gamma_0(t)u]_{x=0} = 0,\ [u_t + \beta_1(t)u_x + \gamma_1(t)u]_{x=l} = 0,\ t \in [0, T], \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u(0, x) = u_0(x),\ u_t(0, x) = u_1(x),\ x \in]0, l[. \tag{3}$$

Определение. Функция $u(x, t)$ из множества $\widehat{W}_2^0(G)$ называется *слабым решением* смешанной задачи (1) – (3) для заданных $f(t, x) \in L_2(]0, T[, W_2^{-1}(0, l))$, $u_0(x) \in W_2^1(0, l)$ и $u_1(x) \in L_2(0, l)$, если верно тождество

$$\int\limits_G \Big\{u, \overline{\varphi}_{tt} - (a_0(t, x)\overline{\varphi}_x)_x + (a_1(t, x)\overline{\varphi}_t)_x + (b_2(t, x)\overline{\varphi})_x + (b_1(t, x)\overline{\varphi})_t +$$

$$+b_0(t, x)\overline{\varphi}\Big\}\, dx\, dt - \int\limits_0^T a_1(t, x)u\overline{\varphi}_t\, dt\, \Big|_{x=0}^{x=l} = \int\limits_0^T \langle f, \overline{\varphi}\rangle\, dt + \int\limits_0^l \Big[(b_1(0, x)u_0(x) +$$

$$+u_1(x))\overline{\varphi}(0, x) - u_0(x)\overline{\varphi_t}(0, x) - u_0(x)(a_1(0, x)\overline{\varphi}(0, x))_x + u_0'(x)a_1(0, x)\overline{\varphi}(0, x)\Big]\, dx$$

$$\forall \varphi \in \Phi = \{\varphi \in W_2^2(G) : \varphi \in (2),\ t \in [0, T],\ \varphi(T, x) = \varphi_t(T, x) = 0;\ x \in]0, l[\}.$$

Здесь $W_2^{-1}(0, l)$ – антидвойственное пространство к пространству Соболева $W_2^1(0, l)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – форма антидвойственности между $W_2^1(0, l)$ и $W_2^{-1}(0, l)$. Множество $\widehat{W}_2^0(G)$ состоит из всех функций $u \in L_2(G)$, у которых значения $u(t, 0)$, $u(t, l) \in L_2(0, T)$, и представляет собой замыкание множества функций пространства Соболева $W_2^1(G)$ по норме $\langle |u| \rangle = \Big\{\int_G |u|^2\, dx\, dt + \int_0^T (|u(t, 0)|^2 + |u(t, l)|^2)\, dt\Big\}^{1/2}$.

Теорема. *Если коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют следующим требованиям:* $a_0(t, x) \in C_{t,x}^{2,1}(G)$, $a_1(t, x) \in C_{t,x}^{1,1}(G)$, $a_k(t, x) \geqslant \tilde{a}_k > 0$, $k = 1, 2$, $\beta_i(t), \gamma_i(t) \in C^{(2)}[0, T]$, $\beta_i(t) \neq 0$, $\beta_i(t)\gamma_i(t) \geqslant 0$, $t \in [0, T]$, $i = 0, 1$, *то при любых* $f(t, x) \in L_2(]0, T[, W_2^{-1}(0, l))$, $u_0(x) \in W_2^1(0, l)$ *и* $u_1(x) \in L_2(0, l)$ *существуют единственные слабые решения* $u(x, t) \in \widehat{W}_2^0(G)$ *смешанной задачи (1) – (3), для которых справедлива оценка*

$$\int\limits_G |u(x, t)|^2\, dx\, dt \leqslant c\left[\int\limits_0^T |\langle f(x, t)\rangle|^2\, dt + \int\limits_0^l \left(|u_0(x)|^2 + |u_0'(x)|^2 + |u_1(x)|^2\right)\, dx\right],$$

где $|\langle \cdot \rangle|$ *– норма двойственного пространства* $W_2^{-1}(0, l)$ *и постоянная* $c > 0$ *не зависит от* u, t и x.

Заметим, что класс слабых решений $\widehat{W}_2^0(G)$ настоящей работы шире классов $\widehat{W}_2^1(G)$ и $\widehat{W}_2^2(G)$ слабых решений Ильина В.А. из [1]. Формула классического решения смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний полуограниченной струны с краевым условием типа (2) получена в [2]. Априорная оценка гладких и сильных (обобщенных) решений смешанной задачи для линейных гиперболических уравнений второго порядка более общего вида, чем уравнение (1), при зависящих от времени граничных условиях типа (2) выведена в [3].

Литература

1. Ильин В. А. *Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.

2. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. *О смешанной задаче для уравнения колебания струны с краевым условием, зависящим от времени* / Третья Международная конференция, посвященная 85-летию Л.Д. Кудрявцева. Москва. РУДН. 24-28 марта 2008г. // Тезисы докладов. М., МФТИ. 2008. С. 228–229.

3. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. *Априорные оценки решений смешанной задачи для гиперболических уравнений второго порядка с краевым условием, зависящим от времени* / X Белорусская математическая конференция. Минск. 3–7 ноября 2008 г. // Тезисы докладов. В 5 частях. Ч. 2. Минск, ИМ НАН Беларуси. 2008. С. 83.