ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В. И. Корзюк, О. А. Конопелько (Минск, Беларусь)

В $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ задается цилиндрическая область $Q = (0,T) \times \Omega$, $x_0 \in (0,T)$, $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. В области Q относительно функции $u\colon Q \ni \mathbf{x} \to u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с оператором составного типа в главной части

$$\mathcal{L}u \equiv \mathcal{L}^{(0)}u + A^{(2)}u = f(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathcal{L}^{(0)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - a^2 A\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + b^2 A\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$— заданные постоянные, $a^2 < b^2$, $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant c^{(0)}|\boldsymbol{\xi}|^2$ для любого $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $c^{(0)} \in \mathbb{R}$— некоторая положительная постоянная, $|\boldsymbol{\xi}|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$, $A^{(2)} = \sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant 2} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x}) D^{\boldsymbol{\alpha}}$, $D^{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_0^{\alpha_0} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, α_i, $i = 0, \ldots, n,$— целые неотрицательные числа, $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$, $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$, $a^{(\boldsymbol{\alpha})} \in C(\overline{Q})$, $f \in L_2(Q)$— заданные функции.

Граница ∂Q области Q состоит из нижнего основания $\Omega^{(0)} = \{\mathbf{x} \in \overline{Q} \mid x_0 = 0\}$, верхнего основания $\Omega^{(T)} = \{\mathbf{x} \in \overline{Q} \mid x_0 = T\}$ и боковой поверхности $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \overline{Q} \mid 0 < x_0 < T\}$.

На $\Omega^{(0)}$ задаются граничные условия

$$lu \equiv u|_{\Omega^{(0)}} = \varphi(\mathbf{x}'), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0, \tag{3}$$

на $\Omega^{(T)}$— условие

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0, \tag{4}$$

на Γ— условия

$$u|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{5}$$

где $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = (\nu_0(\mathbf{x}), \ldots, \nu_n(\mathbf{x}))$— единичный вектор внешней относительно области Q нормали в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Задачу (1)–(5) запишем в виде линейного операторного уравнения

$$\mathbf{L}u = \mathbf{F}, \tag{6}$$

где $\mathbf{L} = (\mathcal{L}, l)$, $\mathbf{F} = (f, \varphi)$, область определения оператора $\mathbf{L}$ $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ состоит из функций из пространства $C^4(\overline{Q})$, удовлетворяющих граничным условиям (3)–(5), т. е. $\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \{u \in C^4(\overline{Q}) \mid \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{\Omega(0)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\Big|_{\Omega(0)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\Big|_{\Omega(T)} = u|_\Gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\Big|_\Gamma = 0\}$.

Банахово пространство B получается путем замыкания множества $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ по норме $\|u\|_B = \sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|=2} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} u\|_{L_2(Q)} + \sup\limits_{0<\tau<T} \sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant 1} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} u\|_{L_2(\Omega)}(\tau)$, гильбертово пространство правых частей уравнения (6) обозначим H, т. е. $H = L_2(Q) \times H^2(\Omega)$.

Для того, чтобы доказать существование и единственность сильного решения задачи (1)–(5) (уравнения (6)), достаточно доказать энергетическое неравенство для оператора $\mathbf{L}$, замыкаемость оператора $\mathbf{L}$ и плотность множества значений $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ в пространстве H.

Теорема 1. *Для оператора $\mathbf{L}$ операторного уравнения (6) справедливо энергетическое неравенство, т. е.*

$$\|u\|_B \leqslant c^{(1)} \|\mathbf{L}u\|_H \tag{7}$$

для любого $u \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$, где $c^{(1)} \in \mathbb{R}$— некоторая положительная постоянная, не зависящая от функции u.

Оператор $\mathbf{L}$ допускает замыкание. Плотность множества значений оператора $\mathbf{L}$ $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ доказывается путем представления оператора $\mathbf{L}$ в виде композиции волнового оператора и оператора типа Лапласа. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для любых функций $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in H^2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u \in B$ задачи (1)–(5) и справедлива оценка $\|u\|_B \leqslant c^{(1)}(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{H^2(\Omega)})$, где постоянная $c^{(1)}$ та же, что и в неравенстве (7).*

Существование и единственность сильного решения этой задачи в случае $A = \Delta$, где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$— оператор Лапласа, были доказаны в [1].

Литература

Конопелько О. А. *Граничная задача для уравнения четвертого порядка составного типа*// Вестн. БГУ. Сер. 1. 2008. № 3. С. 73–79.