ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО СОБОЙ КОМПОЗИЦИЮ ДВУХ ОПЕРАТОРОВ

В. И. Корзюк, В. В. Дайняк, М. Д. Белов (Минск, Беларусь)

В данной работе рассматривается задача типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами главная часть которого представляет собой композицию гиперболического оператора первого порядка и эллиптического оператора второго порядка. Это дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1, x_2)$ запишем в виде

$$\mathcal{L}u = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + b_1\frac{\partial}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + a_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + \mathcal{L}_1(x, D) = 0, \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}_1(x, D)u = p_0(x)\frac{\partial u}{\partial x_0} + p_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda(x)u.$$

Здесь $a_i, b_j, i, j = 1, 2$ постоянные, коэффициенты полинома $\mathcal{L}_1(x, D)u$ и их производные $\frac{\partial p_i}{\partial x_i}(i = 0, 1, 2)$ измеримы и ограничены. При некоторых еще дополнительных условиях на коэффициенты оператора $\mathcal{L}$, которые будут сформулированы ниже и которые являются достаточными, методами функционального анализа доказывается в обобщенной постановке однозначная разрешимость уравнения в произвольной области

при наличии простейших граничных условий (условий типа Дирихле). Суть постановки задачи в следующем. Пусть Ω - произвольная ограниченная область 3-мерного евклидова пространства переменных x с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через ν единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.
Пусть $\mathcal{L}_0(\nu) = \nu_0^3 + b_1\nu_0^2\nu_1 + a_1^2\nu_0\nu_1^2 + a_1^2 b_1\nu_1^3 + a_2^2 b_2\nu_2^3 + b_2\nu_0^2\nu_2 + a_2^2\nu_0\nu_2^2 + b_1 a_2^2\nu_1\nu_2^2 + b_2 a_1^2\nu_1^2\nu_2$.
В области Ω рассмотрим уравнение относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где Ω^- - часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(\nu) < 0$.

Условие I.

а) $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, a_1 \neq 0$;

б) $a_1^2 - 9b_1^2 > 0$;

в) $12a_1^2a_2^4b_1 + 12a_2^4b_1^2 + a_1^2a_2^2b_2^2 + a_2^2b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^4 > 0$.

Условие II. Коэффициенты полинома $\mathcal{L}_1(x, D)$ таковы, что

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial p_0(x)}{\partial x_0} + \frac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2(x)}{\partial x_2}\Big) + \lambda(x) \geqslant 0$$

для любого $x \in \bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega}$ - замыкание области Ω).

Наряду с поставленной задачей будем рассматривать сопряженную задачу, т. е.

$$\mathcal{L}^+\nu = g(x), \tag{3}$$

$$\nu|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial\nu}{\partial\nu}|_{\partial\Omega^+} = 0, \partial\Omega^+ = \{x \in \partial\Omega | \mathcal{L}_0(\nu) > 0\}, \tag{4}$$

где $\mathcal{L}^+$ – формально сопряженный к $\mathcal{L}$ оператор и

$$\mathcal{L}^+u = -\Big(\frac{\partial}{\partial x_0} + b_1\frac{\partial}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + a_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big) + \mathcal{L}_1(x, D) = 0,$$

$\mathcal{L}_1^+$ – оператор первого порядка, формально сопряженный к $\mathcal{L}_1$.

Теорема 1. *При выполнении условий I, II для любых u и v из $H_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

$$\|\nu\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c^*\|L\nu\|_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

где постоянные $c > 0$ и $c > 0$ не зависят от функций u и v.*

Теорема 2. *При выполнении условий **I** и **II** для любого $f \in H_0^{-1}(g \in H_0^{-1})$ существует и единственно обобщенное решение $u \in H_0^1(\nu \in H_0^1)$ задачи (1),(2) ((3),(4)).*

Литература

1. Дайняк В. В., Корзюк В. И. *Задача типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка*// Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 6. С.1056.

2. Корзюк В. И., Дайняк В. В. *О разрешимости смешанных задач для нестационарных уравнений третьего порядка*// Вестник БГУ. Сер. I. 2005. № 2. С.54.

3. Корзюк В. И., Киселев В. Б. *Граничная задача для линейного неклассического уравнения третьего порядка порожденного уравнением теплопроводности*// Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. н. 2001. № 3. С. 5–11, 140.