СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С B-СИММЕТРИЧНЫМИ B-ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. Г. Замураев (Могилев, Беларусь)

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ рассмотрим дистрибутивный оператор A с областью $D(A)$, $\overline{D(A)} = H$, и замыкаемый дистрибутивный оператор B, $D(A) \subset D(B)$,

$$\overline{R_A(B)} = \overline{\{Bv \mid v \in D(A)\}} = H,$$

такие, что оператор A является B-симметричным и B-положительно определенным на $D(A)$ [1].

Пусть H_{AB} — обобщенное пространство Фридрихса оператора A, $[\cdot,\cdot]$ — скалярное произведение в H_{AB}, B_0 — расширение оператора B по непрерывности на все H_{AB}.

Рассмотрим метрическое пространство C_{ad} — множество допустимых управлений и семейство $\{H_{ABc}\}$, $c \in C_{ad}$, замкнутых подпространств пространства H_{AB}. Пусть $f \in H$. Для любого допустимого управления c рассмотрим линейное функциональное уравнение

$$u_c \in H_{ABc},\ [u_c, v] = (f, B_0 v)\ \forall v \in H_{ABc}. \tag{1}$$

Пусть u_c^0— решение уравнения (1).

Зададим функционал $J(c,v)$, $J : C_{ad} \times H_{AB} \to R$, обозначим $j(c) \equiv J(c, u_c^0)$, $c \in C_{ad}$, и рассмотрим задачу отыскания среди допустимых управлений управления, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c)$ на C_{ad} (задача (C)). Рассматриваемая задача является обобщением ряда задач построения оптимальной области [2].

Пусть P_c — оператор ортогонального проектирования пространства H_{AB} на подпространство H_{ABc}.

Примем следующие предположения:

1) C_{ad} — компакт;

2) из условий

$$c_n \in C_{ad}, \quad c_n \to c \in C_{ad}, \tag{2}$$

$v \in H_{AB}, P_{c_n} v \rightharpoonup \bar{v}$ (слабо в H_{AB}) следует $\bar{v} = P_c v$;

3) существует постоянная k_J такая, что $J(c, v) \geqslant k_J$ $\forall c \in C_{ad}$, $\forall v \in H_{AB}$, k_J не зависит от c, v; выполняется неравенство Липшица $|J(c, v_1) - J(c, v_2)| \leqslant L_J |v_1 - v_2|$ $\forall c \in C_{ad}$, $\forall v_1, v_2 \in H_{AB}$, где постоянная $L_J > 0$ не зависит от c, v_1, v_2; из условий (2) следует $\lim_{n \to \infty} J(c_n, v) = J(c, v)$ $\forall v \in H_{AB}$.

Теорема [3]. *При сделанных предположениях 1)–3) задача* (C) *имеет по крайней мере одно решение.*

Литература

1. Филиппов В. М. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов*. Москва: Изд-во УДН, 1985.

2. Neittaanmaki P., Sprekels J., and Tiba D. *Optimization of Elliptic Systems: Theory and Applications*. New York, Springer Science, 2006.

3. Замураев В. Г. *Существование оптимальных пространств для линейных функциональных уравнений* // Дифференц. уравн. 2002. Т. 38, № 7. С. 982–985.